انتگرال نامعین:

تعریف: اگر تابع $f(x)$ و $F(x)$ در بازه I چنان باشند که $\forall x\in I : F'(x)=f(x)$

آنگاه $F(x)$ را یک ضدمشتق یا پادمشتق تابع $f(x)$ گوییم.

* اگر $F(x)$ یک ضدمشتق $f(x)$ باشد آنگاه ضدمشتق‌های دیگر $f(x)$ به شکل $F(x)+c$ هستند.

در این صورت، $F(x)+c$ را انتگرال نامعین تابع $f(x)$ گوییم و می‌نویسیم

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

مثال) $(\sin x)'=\cos x \Longrightarrow \int \cos x\,dx = \sin x + c$

فرمول‌های انتگرال‌گیری نتیجه شده از مشتق:

* $\int u'(x)\,dx = u(x)+c$ چون $(u(x)+c)'=u'(x)$

* $\int a\,u(x)\,dx = a\int u(x)\,dx$ چون $(a\,u(x))'=a\,(u(x))'$

* $\int (u(x)\pm v(x))\,dx = \int u(x)\,dx \pm \int v(x)\,dx$ چون $(u+v)'=u'+v'$

* قواعد انتگرال‌گیری:

* $\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$ $(n\neq -1)$

* $\int u'u^n\,dx = \frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$ (که در آن u تابعی از x است) (مشابه قبل به ازای هر n غیر از -1)

مثال) $\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3+c$

مثال) $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{3/2} + c$

مثال) $\int (5x - x^2 + 2)\, dx = 5\int x\, dx - \int x^2 dx + \int 2\, dx$

$$= \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 2x + c$$

مثال) $\int \overbrace{2x}^{u'} (\overbrace{x^2+5}^{u})^2 dx = \frac{1}{3}u^3 + c = \frac{1}{3}(x^2+5)^3 + c$

روش ضرب و تقسیم در انتگرال‌گیری :

اگر در مثال آخر ضریب 2 در تابع تحت انتگرال وجود نداشت و می‌خواستیم $\int x(x^2+5)^2 dx$ را حساب کنیم. به ظاهر u' در تابع تحت انتگرال وجود ندارد اما با روش ضرب و تقسیم می‌توان این ضریب را ساخت و فرم مطلوب را ایجاد کرد:

مثال) $\int x(x^2+5)^2 dx = \frac{1}{2}\int \overbrace{2x}^{u'} (\overbrace{x^2+5}^{u})^2 dx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} u^3 + c$

$$= \frac{1}{6}(x^2+5)^3 + c$$

مثال) $\int \sqrt{2x+1}\, dx = \int (2x+1)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int \overbrace{2}^{u'} (\overbrace{2x+1}^{u})^{\frac{1}{2}} dx$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\frac{1}{2}} u^{1+\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{3} u^{3/2} + c = \frac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + c$$

مثال) $\int \frac{6x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx = \int 6x^2 (1+x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = 2\int \overbrace{3x^2}^{u'} (\overbrace{1+x^3}^{u})^{-\frac{1}{2}} dx$

$$= 2 \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1} u^{-\frac{1}{2}+1} + c = 2 \times 2 u^{1/2} + c = 4\sqrt{1+x^3} + c$$

نکته: در حل انتگرال روش‌های مختلف را برای حل امتحان کنید. گاهی حل یک انتگرال بسیار ساده‌تر از آن چیزی است که به نظر می‌رسد.

به عنوان مثال فرض کنید می‌خواهیم $\int (x^2+5)^2 dx$ را حل کنیم. شاید فکر کنید اگر عبارت x^2+5 را u بگیریم. مشتق عبارت وجود ندارد (چون ثابت نیست نمی‌توانیم آن را با ضرب و تقسیم بسازیم)

توجه دارید که

اما حل این انتگرال نیازی به این کار ندارد، به راه حل آن توجه کنید:

$$\int (x^2+5)^2 dx = \int (x^4+10x^2+25)\,dx$$
$$= \int x^4 dx + 10\int x^2 dx + 25\int dx = \frac{1}{5}x^5 + \frac{10}{3}x^3 + 25x + C$$

به همین سادگی ... پس سعی کنید ضرب به عبارت تحت انتگرال توجه کنید و روش های مختلف را امتحان کنید.

در ادامه به مرور روش های بسیار متنوع تری برای حل انتگرال بررسی خواهیم کرد ...

تمرین:

$$\int (2-x)^2 dx = ?$$
$$\int (1+x^3)^2 dx = ?$$
$$\int (x^2-\sqrt{x})\,dx = ?$$
$$\int \sqrt{2+5x}\,dx = ?$$
$$\int \frac{z+1}{(z^2+2z+2)^2}\,dz = ?$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx = ?$$

انتگرال گیری به روش تغییر متغیر یا جانشانی:

* تعریف دیفرانسیل تابع f: اگر $y=f(x)$ تابعی مشتق پذیر باشد آنگاه دیفرانسیل تابع f را با df یا dy نشان می دهیم و تعریف می کنیم:

$$df = f'(x)\,dx$$
$$\left(dy = f'(x)\,dx \quad \text{یا} \quad \frac{dy}{dx} = f'(x) \right)$$

قضیه تغییر متغیر (یا قاعده زنجیره ای) در انتگرال های نامعین:

اگر f در برد تابع $g(x)$ تعریف شده باشد و F یک ضد مشتق f در این بازه باشد در این صورت اگر $u=g(x)$ آنگاه

$$\int f(g(x))\,g'(x)\,dx \underset{\underset{u=g(x)}{\text{تغییر متغیر}}}{=} \int f(u)\,du = F(u)+C = F(g(x))+C$$

مثال) $I = \int x\,(x^2+1)^{20}\,dx$

اگر قرار دهیم $u = (x^2+1)$ آنگاه $du = 2x\,dx$

$$\Rightarrow I = \int u^{20} \times \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{20}\,du = \frac{1}{2} \times \frac{1}{21}\,u^{21} + c$$
$$= \frac{1}{42}\,(x^2+1)^{21} + c$$

توجه دارید که این مثال با روش حدس و امتحان هم قابل حل بود ... (این کار را انجام دهید ..)

مثال) $I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

اگر قرار دهیم $u = 4-x^2$ ،

$$u = 4-x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx$$
$$\Downarrow$$
$$x\,dx = -\frac{1}{2}\,du$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{-\frac{1}{2}\,du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\int u^{-1/2}\,du = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\,u^{-\frac{1}{2}+1} + c$$
$$= -\sqrt{u} + c = -\sqrt{4-x^2} + c$$

این مثال هم با روش حدس و امتحان قابل حل بود...

مثال) $I = \int \frac{x^3}{(1-x^2)^2}\,dx$

$$\begin{cases} u = 1-x^2 \Rightarrow x^2 = 1-u \\ du = -2x\,dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{x^2 \times x\,dx}{(1-x^2)^2} = \int \frac{(1-u) \times -\frac{1}{2}\,du}{u^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1-u}{u^2}\,du = -\frac{1}{2}\left(\int \underbrace{\frac{1}{u^2}}_{u^{-2}}\,du - \int \frac{1}{u}\,du\right)$$
$$= -\frac{1}{2} \times \frac{1}{-2+1}\,u^{-2+1} + \frac{1}{2}\ln|u| + c$$
$$= \frac{1}{2u} + \frac{1}{2}\ln|u| + c = \frac{1}{2(1-x^2)} + \frac{1}{2}\ln|1-x^2| + c$$

* توجه دارید که در این مثال روش حدس و امتحان جوابگو نیست...

فرمول‌های انتگرال‌گیری ساده بر اساس توابع معروف:

۱) $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \xrightarrow{u \text{ تابعی از } x} \int u' u^{\alpha}\,dx = \dfrac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C$

۲) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \longrightarrow \int \dfrac{u'}{u}\,dx = \ln|u| + C$

۳) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C \longrightarrow \int u' \sin(u)\,dx = -\cos(u) + C$

۴) $\int \cos x\,dx = \sin x + C \longrightarrow \int u' \cos(u)\,dx = \sin(u) + C$

۵) $\int e^{x}\,dx = e^{x} + C \longrightarrow \int u' e^{u}\,dx = e^{u} + C$

۶) $\int a^{x}\,dx = \dfrac{1}{\ln a} a^{x} + C \quad (a>0) \longrightarrow \int u' a^{u}\,dx = \dfrac{1}{\ln a} a^{u} + C$

۷) $\int \tan x\,dx = \int \dfrac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$

۸) $\int \cot x\,dx = \int \dfrac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln|\sin x| + C$

۹) $\int (1+\tan^2 x)\,dx = \int \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$

۱۰) $\int (1+\cot^2 x)\,dx = \int \dfrac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$

۱۱) $\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$

۱۲) $\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

۱۳) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

۱۴) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

۱۵) $\int \dfrac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}|x| + C$

مثال)
$$I=\int \sin^2 x \cos x \, dx$$

$$u=\sin x \Rightarrow du=\cos x \, dx$$

$$\Rightarrow I=\int u^2 du = \frac{1}{3}u^3+C = \frac{1}{3}\sin^3 x + C$$

مثال)
$$I=\int \frac{x}{3x^2+1}dx$$

روش تغییر متغیر :

$$u=3x^2+1 \Rightarrow du=6x\,dx$$

$$\Rightarrow I=\int \frac{\frac{1}{6}du}{u} = \frac{1}{6}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{6}\ln|u|+C = \frac{1}{6}\ln|3x^2+1|+C$$

روش حدس و آسان :

$$I=\frac{1}{6}\int \frac{\overset{u'}{6x}}{\underbrace{3x^2+1}_{u}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{u'}{u}dx = \frac{1}{6}\ln|u|+C = \frac{1}{6}\ln|3x^2+1|+C$$

مثال)
$$I=\int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x}dx$$

$$u=\sin 2x \Rightarrow du=2\cos 2x\,dx$$

$$I=\int \frac{\frac{1}{2}du}{u^3} = \frac{1}{2}\int u^{-3}du = \frac{1}{2}\times\frac{-1}{2}u^{-2}+C = \frac{-1}{4}\sin^{-2}x+C = \frac{-1}{4\sin^2 x}+C$$

مثال)
$$I=\int x e^{x^2}dx$$

روش تغییر متغیر :

$$u=x^2 \Rightarrow du=2x\,dx$$

$$I=\int e^u \times \frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u+C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

روش حدس و آسان :

$$I=\frac{1}{2}\int \overset{u'}{2x}\, e^{\overset{u}{x^2}}dx = \frac{1}{2}\int u' e^u dx = \frac{1}{2}e^u+C = \frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

مثال)
$$I=\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$$

$$u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow I=\int u^3 du = \frac{1}{4}u^4+C = \frac{1}{4}(\ln x)^4+C$$

مثال) $I = \int x\, 2^{3x^2}\, dx$

$u = 3x^2 \Rightarrow du = 6x\, dx$

$\Rightarrow I = \frac{1}{6}\int 2^u du = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\ln 2} 2^u + C = \frac{1}{6\ln 2} \times 2^{3x^2} + C$

مثال) $I = \int 16x \sin^3(2x^2+1)\cos(2x^2+1)\, dx$

(راه حل اول): $u = 2x^2+1 \Rightarrow du = 4x\, dx$

$I = \int 4\sin^3 u \cos u\, du = 4\int t^3 dt = 4 \times \frac{1}{4} t^4 + C$

دوباره نیاز به تغییر متغیر دارد

$= \sin^4 u + C = \sin^4(2x^2+1) + C$

$t = \sin u \Rightarrow dt = \cos u\, du$

(راه حل دوم) : با دقت بیشتر به تابع تحت انتگرال می‌توانستیم از تغییر متغیر مستقیم $t = \sin(2x^2+1)$ استفاده کنیم.
با این تغییر متغیر انتگرال را حل کنید...

مثال) $I = \int \sec^2 2x\, dx$

$I = \int \frac{1}{\cos^2 2x} dx = \int (1+\tan^2 2x)\, dx$

$u = 2x \Rightarrow du = 2\, dx \Rightarrow I = \int (1+\tan^2 u) \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{2}\int (1+\tan^2 u)\, du$

$= \frac{1}{2}\tan u + C = \frac{1}{2}\tan(2x) + C$

مثال) $I = \int \sec^3 x \tan x\, dx$

$u = \sec x \Rightarrow du = \sec x \tan x\, dx$

$\Rightarrow I = \int \overbrace{\sec^2 x}^{u^2} \times \overbrace{\sec x \tan x\, dx}^{du} = \int u^2 du = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sec^3 x + C$

تمرین)

$I = \int 3\sin(2x)\, dx$ $\qquad I = \int (1+\tan^2 x)\tan x\, dx$ $\qquad I = \int 2x e^{x^2+1} dx$

$I = \int \frac{\sin 2t}{\sqrt{2-\cos 2t}} dt$ $\qquad I = \int (\sec t + \tan t)\sec t\, dt$ $\qquad I = \int \sin^3 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}\, dx$