یک عامل انتگرال‌ساز معادله دیفرانسیل $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{y^3}$

۲) $\frac{1}{x^3}$

۳) $\frac{1}{xy^3}$

۴) $\frac{1}{x^3y}$

$$\mu = x^{\alpha} y^{\beta}$$

$$x^{2+\alpha} y^{\beta+3} + x^{\alpha+1}\left(y^{\beta} + y^{\beta+2}\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$dx\, \underbrace{x^{\alpha+2} y^{\beta+3}}_{M} + \underbrace{x^{\alpha+1}\left(y^{\beta} + y^{\beta+2}\right)}_{N} dy = 0$$

$$M_y = N_x \rightarrow \underbrace{(\beta+3)}_{=0} x^{\alpha+2} y^{\beta+2} = \underbrace{(\alpha+1)}_{=0} x^{\alpha}\left(y^{\beta} + y^{\beta+2}\right)$$

$$\beta = -3, \quad \alpha = -1 \rightarrow \mu = x^{-1} y^{-3} = \frac{1}{xy^3}$$

عرفان صابر - 09031909605 - @tadrise_khososi

با تغییر متغیر $y = z^{\alpha}$، معادله $(x^{۲}y^{۲} - ۱)\,dy + ۲xy^{۳}dx = ۰$ به یک معادله همگن تبدیل می‌شود. مقدار α کدام است؟

۱) -۱

۲) $-\frac{۱}{۲}$

۳) -۲

۴) $-\frac{۱}{۳}$

$$(x^2y^2-1)\,dy = -2xy^3\,dx \qquad y' = \alpha z^{\alpha-1} z'$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^3}{x^2y^2-1} \qquad y = \frac{1}{z}$$

$$\alpha z^{\alpha-1} z' = -\frac{2x z^{3\alpha}}{x^2 z^{2\alpha}-1} \rightarrow \alpha z' = -\frac{2x z^{3\alpha}}{x^2 \cdot z^{3\alpha-1} - z^{\alpha-1}}$$

$$2 + 3\alpha - 1 = \alpha - 1$$

$$3\alpha + 1 = \alpha - 1 \rightarrow 2\alpha = -2 \rightarrow \alpha = -1$$

جوابی از معادله $(x^{۲}-x\ln xy)y'+y(x-۱)=۰$ که از نقطه $(۱,۱)$ می‌گذرد، کدام است؟ $(x\neq ۰)$

۱) $y(x+\ln x)=۱$

۲) $y(x-\ln x)=۱$

۳) $y(x+\ln xy)=۲-y$

۴) $y(x-\ln xy)=۲-y$

$$(x^2-x\ln xy)\frac{dy}{dx}+y(x-1)=0$$

$$\Big(dx\,\underbrace{(y(x-1))}_{P}+dy\,\underbrace{(x^2-x\ln xy)}_{Q}=0\Big)\times \frac{1}{x}$$

$$P_y=x-1 \qquad Q_x=2x-\ln xy-x\frac{y}{xy}=2x-\ln xy-1$$

$$\mu(x)=e^{\int\frac{P_y-Q_x}{Q}dx},\quad \frac{x-1-2x+\ln xy+1}{x(x-\ln xy)}=\frac{-x+\ln xy}{-x(-x+\ln xy)}$$

$$\mu(x)=e^{\int-\frac{1}{x}dx}=e^{-\ln x}=\frac{1}{x}$$

$$\underbrace{y\left(1-\frac{1}{x}\right)}_{P}dx+\underbrace{(x-\ln xy)}_{Q}dy=0 \qquad P_y=1-\frac{1}{x} \qquad Q_x=1-\frac{y}{xy}$$

$$u_1=\int y\left(1-\frac{1}{x}\right)dx=y(x-\ln x)\ \checkmark =yx-y\ln x$$

$$u_2=\int(x-\ln x-\ln y)\,dy=xy-y\ln x-(y\ln y-y)\ \checkmark$$

$$\int \ln y\,dy \Rightarrow \begin{matrix} u=\ln y\to du=\frac{dy}{y} \\ dy=dv\to y=v\end{matrix}\to y\ln y-\int dy=y\ln y-y$$

$$u(x,y)=xy-y\ln x-y\ln y+y=c \qquad (1,1)$$

$$1+1=c\to xy-y\ln x-y\ln y+y=2$$

$$y(x-\ln x-\ln y)=2-y \longrightarrow y(x-\ln xy)=2-y$$

عرفان صابر - 09031909605 - @tadrise_khososi

یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + 4y = \tan 2x$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}\cos 2x \ln|\sec 2x + \tan 2x|$

۲) $-\frac{1}{4}\cos 2x \ln|\sec 2x + \tan 2x|$

۳) $-\frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sec 2x + \tan 2x|$

۴) $\frac{1}{4}\sin 2x \ln|\sec 2x + \tan 2x|$

$$y'' + 4y = 0 \rightarrow t^2 + 4 = 0 \rightarrow t = \pm 2i$$

$$y_h = c_1 \underbrace{\cos 2x}_{y_1} + c_2 \underbrace{\sin 2x}_{y_2} \quad (1)$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x = 2$$

$$y_p = -y_1 \int \frac{R(x)\, y_2}{W} dx + y_2 \int \frac{R(x)\, y_1}{W} dx$$

$$y_p = -\cos 2x \int \frac{\tan 2x \cdot \sin 2x}{2} dx + \sin 2x \int \frac{\tan 2x \cos 2x}{2} dx$$

$$\int \tan 2x \cdot \cos 2x \, dx = \int \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \cdot \cos 2x \, dx = -\frac{1}{2}\cos 2x$$

$$\int \tan 2x \cdot \sin 2x \, dx = \int \frac{\sin^2 2x}{\cos 2x} dx = \int \sin^2 2x (\sec 2x) \, dx$$

$$= \int (1 - \cos^2 2x)(\sec 2x)\, dx = \int \sec 2x \, dx - \int \cos 2x \, dx$$

$$\frac{1}{2}\ln(\sec 2x + \tan 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$y_p = -\frac{1}{2}\cos 2x \left(\frac{1}{2}\ln(\sec 2x + \tan 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x\right)$$

$$-\frac{1}{4}\sin 2x \cos 2x = -\frac{1}{4}\cos 2x \ln(\sec 2x + \tan 2x)$$

جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 10e^{2x}$، کدام است؟

۱) $y_p = 5xe^{2x}$

۲) $y_p = 10x^2e^{2x}$

۳) $y_p = 5x^2e^{2x}$

۴) $y_p = 10xe^{2x}$

① ضرایب نامعین

② روش اپراتور D

② $(D^3 - 4D^2 + 5D - 2)y = 10e^{2x}$

$$y = \frac{10e^{2x}}{\underbrace{D^3 - 4D^2 + 5D - 2}_{F}} \quad (p = 2)$$

$F(p) = 0 \to \dfrac{10x^1e^{2x}}{D^2 - 2D + 1}\Big|_{D=2} = \dfrac{10xe^{2x}}{4 - 4 + 1} = 10xe^{2x}$

$F(p) \neq 0$

$8 - 16 + 10 - 2 = 0 \to$ ①

$F' = 3D^2 - 8D + 5 \to F'(2) = 12 - 16 + 5 = 1$

$$\begin{array}{l|l} D^3 - 4D^2 + 5D - 2 & D - 2 \\ \hline -D^3 + 2D^2 & D^2 - 2D + 1 \\ -2D^2 + 5D & \\ 2D^2 - 4D & \\ D - 2 & \end{array}$$

روش اپراتور D ۱

① $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = 10e^{2x}$

$y_p = Ax^1e^{2x}$

$y' = A(e^{2x} + 2xe^{2x}) = A(1 + 2x)e^{2x}$

$y'' = A(2)e^{2x} + A(1 + 2x)(2e^{2x}) = Ae^{2x}(2 + 2 + 4x) = Ae^{2x}(4 + 4x)$

$y''' = A(2e^{2x})(4 + 4x) + 4Ae^{2x} = Ae^{2x}(4 + 8 + 8x) = (12 + 8x)Ae^{2x}$

$$(12+8x)Ae^{2x}-4Ae^{2x}(4+4x)+5A(1+2x)e^{2x}-2Axe^{2x}=10e^{2x}$$

$$A(12+8x-16-16x+5+10x-2x)=10$$

- @tadrise_khososi - 09031909605 - عرفان صابر

$$A=10 \longrightarrow y_p=10xe^{2x}$$