۳۱- اگر $f(x)$ تبدیل فوریهٔ معکوس تابع $F(\omega)=\dfrac{e^{۲i\omega}}{(۲+i\omega)^۲}$ باشد، مقدار $f(-۳)+f(۳)$ کدام است؟

راهنمایی: ($F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$)

۱) $۳e^{-۱۰}$

۲) $۵e^{-۱۰}$

۳) $۳e^{-۶}$

۴) $۵e^{-۶}$

$$e^{-۲t}u(t) \xrightarrow{f} \frac{1}{(i\omega+۲)}$$

$$te^{-۲t}u(t) \to i\left(\frac{1}{i\omega+۲}\right)' = \frac{1}{(i\omega+۲)^۲}$$

$$\underbrace{(t+۲)e^{-۲(t+۲)}u(t+۲)}_{f(t)} \to \frac{1}{(i\omega+۲)^۲}\cdot e^{۲i\omega}$$

$$f(-۳)=۰ \quad , \quad f(۳)=۵e^{-۱۰} \to ۲$$

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس
مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه
09031909605-09374127120

۳۲- برای حل مسئله موج زیر تغییر متغیر $u(x,y)=v(x,y)+w(x,y)$ را چنان به‌کار می‌گیریم که $v_x(0,t)=v_x(\pi,t)=0$. اگر $v(x,t)=\frac{1}{2}G_0(t)+\sum_{n=1}^{\infty}G_n(t)\cos nx$ جواب مسئله متناظر با تغییر متغیر باشد، آنگاه $G_n(t),(n\geq 1)$ در کدام معادله دیفرانسیل صدق می‌کند؟

$$\begin{cases} u_{tt}=9u_{xx}, & 0<x<\pi, t>0 \\ u(x,0)=u_t(x,0)=u_x(0,t)=0 \\ u_x(\pi,t)=\pi t^2, & t\geq 0 \end{cases}$$

۱) $G_n''(t)+9n^2G_n(t)=\frac{4(-1)^n}{n^2}$

۲) $G_n''(t)+9n^2G_n(t)=\frac{2(-1)^n}{n}$

۳) $G_n''(t)+9n^2G_n(t)=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}$

۴) $G_n''(t)+n^2G_n(t)=\frac{2(-1)^{n+1}}{n}$

باید حفظ بشیم

$u=v+ax^2+bx$

$u_x=v_x+2ax+b$

$u_x(0)=\cancel{v_x(0)}+b \rightarrow b=0$

$u_x(\pi)=\cancel{v_x(\pi)}+2a\pi$

$\pi t^2=2a\pi \rightarrow a=t^2/2$

$u=v+\frac{x^2t^2}{2} \rightarrow u_{xx}=v_{xx}+t^2 \quad , \quad u_{tt}=v_{tt}+x^2$ جایگذاری در سوال

$v_{tt}+x^2=9(v_{xx}+t^2) \rightarrow v_{tt}+x^2=9v_{xx}+9t^2$ (1)

$v(x,t)=\frac{G_0}{2}+\sum G_n\cos nx \rightarrow \begin{cases} v_{xx}=\sum G(-n^2)\cos nx \\ v_{tt}=\frac{G_0''}{2}+\sum G''\cos nx \end{cases}$ جایگذاری در (1)

$$\frac{G_0''}{2}+\sum G''\cos nx-9\sum -n^2G\cos nx=9t^2-x^2$$

$$\begin{cases} \frac{G_0''}{2}=9t^2 \\ \sum (G''+9n^2G)\cos nx=-x^2 \end{cases}$$

$$G''+9n^2G=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}-x^2\cos nx\,dx$$

جزء جزء

x^2 (+)	$\cos nx$
$2x$ (−)	$\frac{1}{n}\sin nx$
2 (+)	$-\frac{1}{n^2}\cos nx$
0	$-\frac{1}{n^3}\sin nx$

$$''=-\frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx-\frac{2}{n^3}\sin nx\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$G''+9n^2G=-\frac{4}{\pi}\frac{\pi(-1)^n}{n^2}=\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \rightarrow 3$$

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس
مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه
09031909605-09374127120

۳۳- مقدار $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3-2\cos\theta+\sin\theta}$ ، کدام است؟

۱) π

۲) $\frac{4\pi}{3}$

۳) 2π

۴) $\frac{7\pi}{3}$

$$\cos\theta = \frac{z+z^{-1}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

$$d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int \frac{\frac{dz}{iz}}{3-2\frac{z+z^{-1}}{2}+\frac{z-z^{-1}}{2i}} = -i\int \frac{dz}{3z-(z^2+1)+\left(\frac{z^2-1}{2i}\right)}$$

$$= -i \int \frac{dz}{z^2\left(-1+\frac{1}{2i}\right)+3z-1-\frac{1}{2i}}$$

یادت نره

$$z_1, z_2 = \frac{-3\pm\sqrt{9-4\left(-1+\frac{1}{2i}\right)\left(-1-\frac{1}{2i}\right)}}{2\left(-1+\frac{1}{2i}\right)} = \frac{-3\pm 2}{-2-i}$$

$\frac{-5}{-2-i}$ خارج

$\frac{1}{2+i}$ داخل

$$\operatorname*{Res}_{z=\frac{1}{2+i}} f(z) : \lim \frac{\left(z-\frac{1}{2+i}\right)}{z^2\left(-1+\frac{1}{2i}\right)+3z-1-\frac{1}{2i}} \overset{\text{Hop}}{=} \left.\frac{1}{2z\left(-1+\frac{1}{2i}\right)+3}\right|_{z=\frac{1}{2+i}}$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{1}{2+i}\right)\left(\frac{-2i+1}{2i}\right)+3} = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \int f(\theta)\,d\theta = 2\pi i\,\underbrace{(-i)}_{\text{پشت انتگرال}} \times \frac{1}{2} = \pi \rightarrow ①$$

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس

مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه

09031909605-09374127120

یادآوری $\cosh(i\theta)=\cos\theta$

۳۴- مقدار $\oint\limits_{|z|=۲} \frac{\cosh(iz)}{z^۲+۴z+۳}dz$ ، کدام است؟

۱) $\pi\cosh(i)$

۲) $\pi i\cos(۱)$

۳) $\pi\cosh(۱)$

۴) $\pi i\cosh(۱)$

$$\int \frac{\cos z}{(z+1)(z+3)}$$

$z=-1$ ✓

$z=-3$ ✗

$$\text{Res } f(z) : \lim_{z\to -1} \frac{\cancel{(z+1)}\cos z}{\cancel{(z+1)}(z+3)} = \frac{\cos(-1)}{2} = \frac{1}{2}\cos(1)$$

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}\cos(1)\right) = \pi i\cos(1) \longrightarrow$$ ۲

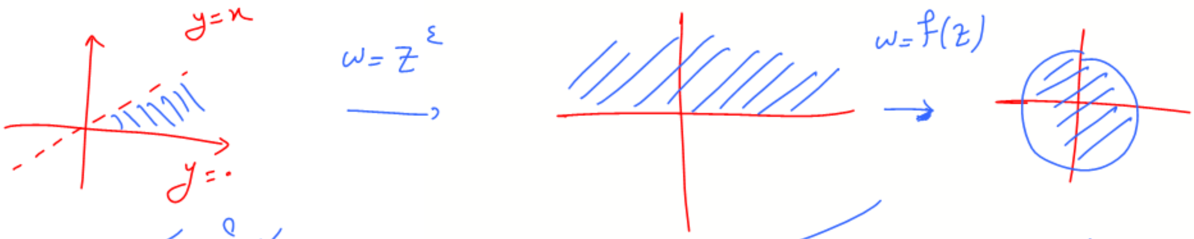
۳۵- نگاشت مختلط w که ناحیهٔ بین خطوط $y = 0$ و $y = x$ واقع در ربع اول صفحهٔ مختصات را به درون دایرهٔ واحد بنگارد، کدام است؟

۱) $w = \frac{z^4 + i}{z^4 + 1}$

۲) $w = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$

۳) $w = \frac{z^4 + 1}{z^4 - 1}$

۴) $w = \frac{z^4 - 1}{z^4 + 1}$



دنبال موبیوسی هستیم که نیم صفحه بالا را، درون دایره واحد نگاشت کند.
$(\mathrm{Im}\, z > 0)$

$$w = \frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}}$$

α : عدد دلخواه

تنها گزینه‌ای که صورت و مخرج مزدوج یکدیگرند گزینه ۲ است.

عرفان صابر - فوق لیسانس برق از دانشگاه امیرکبیر - 12 سال سابقه تدریس

مدرس پر فروش ترین دوره های ریاضی یک - معادلات - ریاضی مهندسی در سایت مکتب خونه

09031909605-09374127120