۱- ماتریس ها :

تعریف۱: هر آرایش مستطیلی سطری و ستونی از اعداد حقیقی را ماتریس می نامند و با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنند.

مثال۱:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ \sqrt{5} & \frac{1}{2} \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

تعریف۲ : ماتریس A که دارای mسطر و n ستون است را یک ماتریس از مرتبه $m\times n$ می نامند.

تعریف۳ : هر عدد حقیقی واقع بر سطر iام و ستون jام ماتریس A را درایه a_{ij} می نامند.

در مثال ۱ماتریس A دارای ۳ سطر و ۲ ستون است بنابراین یک ماتریس از مرتبه 3×2 است ، $\sqrt{5}$ درایه روی سطر دوم و ستون اول و ۳- درایه روی سطر سوم و ستون دوم است.

** نمایش کلی ماتریس A از مرتبه $m\times n$

$$A=\left[a_{ij}\right]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

تعریف۴: (ماتریس مربعی)

هر ماتریس از مرتبه $m\times n$ که در آن $m=n$ باشد را ماتریس مربعی می نامند .

مثال۲ :

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & \frac{1}{2} & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3} ,C=[7]_{1\times 1}$$

در ماتریس بالا ۱،۰،۶ که در آن ها i=j هست (درایه های a_{11}، a_{22}، a_{33}) روی قطر اصلی و ۳،۰،۲ هم اعضای روی قطر فرعی هستند.

*** : درایه های روی قطر اصلی از رابطه $a_{i\,(n+1-i)}$ پیروی می کنند که در آن n مرتبه ماتریس است .

تعریف ۵: اگر ماتریس A فقط از یک سطر تشکیل شده باشد ماتریس سطری نامیده می شود.

مثال ۳:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 4 & -3 & 8\end{bmatrix}_{1\times 4}$$

تعریف ۶: اگر ماتریس A فقط از یک ستون تشکیل شده باشد ماتریس ستونی نامیده می شود.

مثال۴:

$$A=\begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}_{2\times 1}$$

تعریف ۷: ماتریس بالا مثلثی یک ماتریس مربعی است که همه ی درایه های زیر قطر اصلی آن صفر است.

مثال ۵:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\9 & 8 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

تعریف ۸: ماتریس پایین مثلثی یک ماتریس مربعی است که همه ی درایه های بالای قطر اصلی آن صفر است.

مثال ۶:

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & -7\\0 & 8 & 9\\1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

تعریف ۹: اگر تمام درایه های غیر واقع بر قطر اصلی یک ماتریس مربعی صفر باشد آن ماتریس را ماتریس قطری می نامند.

مثال ۷:

$$D=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0\\0 & -9 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

تعریف ۱۰: ماتریس اسکالر یک ماتریس مربعی است که تمام درایه های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند.

مثال ۸:

$$D=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0 & 0\\0 & \sqrt{3} & 0 & 0\\0 & 0 & \sqrt{3} & 0\\0 & 0 & 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

تعریف ۱۱: ماتریس واحد یا یکه یک ماتریس اسکالر است که تمام درایه های روی قطر اصلی آن یک باشد. ماتریس واحد را با حرف I نمایش می دهیم.

مثال ۹:

$$I_{4\times4}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

نکته : ماتریس واحد عضو خنثی عمل ضرب ماتریس هاست.

تعریف ۱۲: ماتریس صفر ماتریسی است که تمام درایه های آن صفر باشد. ماتریس صفر را با نماد 0 نمایش می دهند.

مثال ۱۰:

$$0_{2\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

نکته : ماتریس صفر عضو خنثی عمل جمع ماتریس هاست.

مثال ۱۱: اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times4}$ به طوری که داشته باشیم $a_{ij}=\begin{cases}7 & i=j\\ i+j & i>j\\ i^2 & i<j\end{cases}$ در این صورت ماتریس A را با درایه هایش مشخص کنید.(تمرین ۱ صفحه ۲۰ کتاب درسی)

حل :

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&1^2=1&1^2=1&1^2=1\\2+1=3&7&2^2=4&2^2=4\\3+1=4&3+2=5&7&3^2=9\end{bmatrix}=$$

مثال ۱۲: اگر $A=\begin{bmatrix}m&0\\m-2&n\end{bmatrix}$ ماتریس اسکالر باشد، مقادیر mو n را به دست آورید.

حل: در یک ماتریس اسکالر اعداد روی قطر اصلی یعنی m و n با هم برابرند و بقیه درایه ها صفر می باشند.(دی ۱۴۰۱)

$$m-2=0\Rightarrow m=2\Rightarrow n=2$$

مثال ۱۳: اگر $\begin{bmatrix}r&m-1\\0&1\end{bmatrix}$ یک ماتریس همانی باشد حاصل m+r برابر ------------- است. (خرداد۱۴۰۱)

حل: در ماتریس همانی درایه های روی قطر اصلی ۱ و دیگر درایه ها صفر هستند.

$$r=1,m-1=0\Rightarrow m=1$$
$$\Rightarrow r+m=1+1=2$$

۲-تساوی بین دو ماتریس:

تعریف ۱:دو ماتریس A وB با هم مساویند هر گاه

الف: هم مرتبه باشند.

ب: به ازای هر i و j ، $a_{ij}=b_{ij}$ (درایه های نظیر به نظیر با هم برابر باشند.)

مثال ۱: مقادیر x و y را طوری به دست آورید که دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} x+3y & 2 \\ 1 & 2x-y \end{bmatrix}$ با هم برابر باشند.

حل:

$$\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+3y=5 \\ 6x-3y=9 \end{cases}$$

$$7x=14 \Rightarrow x=\frac{14}{7}=2$$

$$x+3y=5 \Rightarrow 2+3y=5 \Rightarrow 3y=5-2 \Rightarrow y=\frac{3}{3}=1$$

مثال ۲: اگر $A=\begin{bmatrix} 2x & 5 \\ z & 1 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 2x+y \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ و A=B در این صورت حاصل $x+2y+3z$ را بیابید.(دی ۱۴۰۰)

حل:

$$\begin{cases} 2x=3 \to x=\frac{3}{2}=1.5 \\ 2x+y=5 \to 2(1.5)+y=5 \to y=5-3=2 \Rightarrow 1.5+2(2)+3(-2)=-0.5 \\ z=-2 \end{cases}$$

۳-جمع دو ماتریس:

نکته: برای جمع دو ماتریس A و B

الف: باید دو ماتریس هم مرتبه باشند.

ب: درایه های نظیر به نظیر با هم جمع می شوند. ($a_{ij}+b_{ij}$)

مثال ۱: اگر $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$ حاصل A+B و A-B را حساب کنید.

حل:

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-1 & -1+2\\ 3-2 & 2+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

برای محاسبه A-B کافیست ماتریس A را با قرینه B جمع کنیم.

نکته: قرینه ماتریس A از قرینه شدن تمام درایه های A به دست می آید.طبیعی است که حاصل جمع هر ماتریس با قرینه اش برابر ماتریس صفر است.

$$A-B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & -1-2\\ 3+2 & 2-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

۴-ضرب یک عدد حقیقی در ماتریس

نکته: برای ضرب عدد حقیقی k در ماتریس A کافیست تمام درایه های A را در k ضرب کنیم

مثال ۱:

$$5\times\begin{bmatrix}0&-1\\-4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times0&5\times(-1)\\5\times(-4)&5\times2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-5\\-20&10\end{bmatrix}$$

مثال ۲: اگر $2A-3I=\begin{bmatrix}3&-1\\2m&4\end{bmatrix}$ و مجموع درایه های ماتریس A برابر ۱۰ باشد، m را بیابید.

حل:

$$2A-3I=\begin{bmatrix}3&-1\\2m&4\end{bmatrix}\Rightarrow 2A=\begin{bmatrix}3&-1\\2m&4\end{bmatrix}+3I\Rightarrow 2A=\begin{bmatrix}3&-1\\2m&4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\2m&4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-1\\2m&7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6&-1\\2m&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-\frac{1}{2}\\m&\frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$3-\frac{1}{2}+m+\frac{7}{2}=10\Rightarrow 6+m=10\Rightarrow m=10-6=4$$

مثال ۳: اگر $A=\left[a_{ij}\right]_{3\times3}, B=\left[b_{ij}\right]_{3\times3}$ دو ماتریس با شرایط زیر باشد مطلوبست $2A-B+3I$.

$$a_{ij}=\begin{cases}i^2-j & i<j\\2i-1 & i=j\\j^2-1 & i>j\end{cases},\qquad b_{ij}=\min\{i,j\}$$

حل:

$$i=j\rightarrow\begin{cases}a_{11}=2-1=1\\a_{22}=4-1=3\\a_{33}=6-1=5\end{cases},\ i<j\rightarrow\begin{cases}a_{12}=1-2=-1\\a_{13}=1-3=-2\\a_{23}=4-3=1\end{cases}\quad i>j\rightarrow\begin{cases}a_{21}=1-1=0\\a_{31}=1-1=0\\a_{32}=4-1=3\end{cases}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&3&1\\0&3&5\end{bmatrix}$$

$$b_{ij}=\min\{i,j\}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}$$

$$2A-B+3I=2\begin{bmatrix}1&-1&-2\\0&3&1\\0&3&5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-2&-4\\0&6&2\\0&6&10\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1&-1&-1\\-1&-2&-2\\-1&-2&-3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-3&-5\\-1&7&0\\-1&4&10\end{bmatrix}$$

۵-ضرب ماتریس ها :

تعریف ۱:(ضرب ماتریس سطری در ستونی) :

اگر ***A* یک ماتریس سطری** از مرتبه $1\times n$و ***B* یک ماتریس ستونی** از مرتبه $n\times 1$ باشد بطوریکه تعداد ***ستون های A*** با ***تعداد سطرهای B*** برابر باشند حاصلضرب $A\times B$ تعریف می شود و برابر یک ماتریس 1×1 است.

مثال ۱: اگر $B=\begin{bmatrix}3\\-2\\5\end{bmatrix}_{3\times 1}$, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}_{1\times 3}$ باشد آنگاه

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\-2\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times 3+2(-2)+0\times 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\end{bmatrix}$$

<u>*** توجه داشته باشید که ماتریس A دارای سه ستون و ماتریس B دارای سه سطر است .</u>

مثال ۲: ماتریس سطری A از مرتبه 1×4 و ماتریس ستونی B از مرتبه 4×1 را چنان بیابید که حاصلضرب $A\times B=\begin{bmatrix}-7\end{bmatrix}$ باشد .

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & x\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-9\\2\\-4\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times(-9)+2\times 2+3\times(-4)+xy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9+4-12+xy\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7\end{bmatrix}$$

$$-17+xy=-7\rightarrow(x=1,y=10)\quad(x=2,y=5)\quad\ldots\ldots$$

با توجه به ماتریس های انتخابی توسط شما مساله جوابهای متعدد خواهد داشت.

تعریف۲(ضرب دو ماتریس):

درایه ij ماتریس حاصلضرب برابر حاصل ضرب سطر iام ماتریس A در سطر j ام ماتریس B خواهد بود.

درایه ۱۱ ماتــریس C =ستون اول ماتریسB × سطر اول ماتــریس A

درایه ۱۲ ماتــریس C =ستون دوم ماتریسB × سطر اول ماتــریس A

درایه ۳٤ ماتریس C =ستون چهارم ماتریسB × سطر سوم ماتریس A

درایه ij ماتــریس C =ستون j ام ماتریسB × سطر i ام ماتــریس A

***بنابراین این حاصلضرب زمانی تعریف می شود که تعداد ستون های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشند.

***اگر A یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ و B یک ماتریس از مرتبه $n \times p$ باشد حاصل ماتریس C از مرتبه $m \times p$ خواهد بود.

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

مثال ۳: حاصل ضرب دو ماتریس زیر را به دست اورید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A_{2\times2} \times B_{2\times3} = C_{2\times3} \Rightarrow C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$a_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times0+1\times3 \end{bmatrix} = 3$$

$$a_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times2+1\times1 \end{bmatrix} = 4+1=5$$

$$a_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 4-1=3$$

$$a_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = 0+12=12$$

$$a_{22} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 6+4=10$$

$$a_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 6-4=2 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 12 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

تذکر : محاسبات صرفا برای درک بهتر دانش آموز در اینجا امده است نوشتن راه حل در اوراق امتحانی الزامی نیست.

تذکر: برای تسلط به ضرب ماتریس ها لطفا کار در کلاس صفحه ۱۸ کتاب و چند تمرین دلخواه را حل کنید.

مثال۴: اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ آیا ماتریس های $A \times B, B \times A$ هر دو تعریف می شوند ؟ هر کدام که تعریف می شود را محاسبه کنید.

حل:

$A \times B = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}_{2\times3} \times \begin{bmatrix} b_{ij} \end{bmatrix}_{2\times2} \rightarrow$ تعداد ستون های ماتریس A برابر ۳ و تعداد سطرهای ماتریس Bبرابر ۲ است پس ضرب تعریف نمی شود

$$C=B\times A=\begin{bmatrix}2&1\\1&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&2&-1\\0&3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&7&-1\\1&11&2\end{bmatrix}$$

$$c_{11}=[2\quad 1]\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=2\times1+1\times0=2$$

$$c_{12}=[2\quad 1]\times\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=2\times2+1\times3=4+3=7$$

$$c_{13}=[2\quad 1]\times\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=2\times-1+1\times1=-2+1=-1$$

$$c_{21}=[1\quad 3]\times\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=1\times1+3\times0=1$$

$$c_{22}=[1\quad 3]\times\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=1\times2+3\times3=2+9=11$$

$$c_{23}=[1\quad 3]\times\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=1\times-1+3\times1=-1+3=2$$

*****خواص ضرب ماتریس ها:**

الف: ضرب ماتریس ها خاصیت جابه جایی ندارد $A\times B\neq B\times A$

ب: ماتریس واحد یا همانی عضو خنثی در عمل ضرب ماتریس هاست. $A\times I=I\times A=A$

ج: خاصیت توزیع پذیری دارد $A\times(B+C)=A\times B+A\times C$

د: شرکت پذیر است $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

نکته: ممکن است حاصلضرب دو ماتریس صفر باشد اما هیچ کدام از آنها صفر نباشد.

نکته : قانون حذف در ضرب ماتریس ها برقرار نیست. ($AB=AC\not\Rightarrow A=C$)

نکته : اگر A یک ماتریس قطری از مرتبه n ($A=\begin{bmatrix}r_1&0&\cdots&0\\0&r_2&\cdots&0\\\vdots&&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&r\end{bmatrix}$) و B یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد

($B=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&&\ddots&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}$) آنگاه :

$$A \times B = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 b_{11} & r_1 b_{12} & \cdots & r_1 b_{1n} \\ r_2 b_{21} & r_2 b_{22} & \cdots & r_2 b_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ r_n b_{n1} & r_n b_{n2} & \cdots & r_n b_{nn} \end{bmatrix}$$