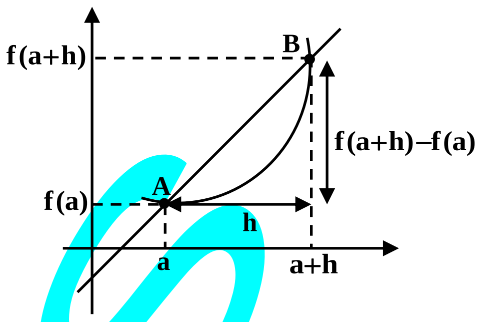
فصل پانزدهم: مشتق

MMS

(۱۵-۱) مفهوم مشتق

(۱) مشتق تابع

فرض کنید $y=f(x)$ تابع و $a\in D_f$ نقطهٔ درونی باشد. در اینصورت مشتق تابع f در نقطهٔ a به صورت زیر تعریف می‌شود:



$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

به شرطی که این حد موجود باشد. داریم:

$$\text{if}: x=a+h \;\to\; h=x-a$$
$$h\to 0 \quad x\to a$$
$$\text{Then}:\quad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$h=\Delta x$ را "نمو متغیر" و $f(a+h)-f(a)=\Delta y$ را "نمو تابع" می‌نامند. بنابراین:

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(۲) نکته

شکل بالا نشان می‌دهد که شیب خط واصل AB برابر است با:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر با نزدیک شدن h به صفر، این کسر به عدد خاصی نزدیک شود، این عدد همان شیب خط مماس m بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ خواهد بود. یعنی:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تست

۱- هرگاه $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{h}=x^2+1$، حاصل $f'(\sqrt{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۲ ۴) ۴

۲- اگر $g(x)=\sqrt{3x}$ و $f(x)=x^3-2x^2$، آنگاه حاصل $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)g(3+h)-f(2)g(2)}{h}$ کدام است؟

۱) $\frac{93}{2}$ ۲) $\frac{95}{2}$ ۳) $\frac{97}{2}$ ۴) $\frac{99}{2}$

۳- اگر $f(x)=(x-2)\sqrt[3]{x^2}$ حاصل $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$ کدام است؟ (س ۸۴)

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{2}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

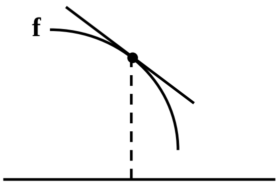
۴- مشتق تابع f در نقطهٔ $x=2$ بصورت $12=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)^2+k(2+h)-2k-8}{h}$ بیان شده است. k کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۲ (س ۸۱)

MMS

(۳) تعبیر هندسی مشتق

از نظر هندسی، مشتق یک تابع به ازای طول نقطهٔ تماس برابر است با شیب‌خط مماس بر منحنی در نقطهٔ تماس. یعنی:

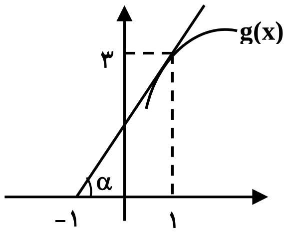


$$m=f'_{+}(a)=f'_{-}(a)$$

$$m=f'(a)$$

تست

۵- با توجه به شکل مقابل اگر $f(x)=\frac{۲x}{g(x)}$ باشد آنگاه $f'(۱)$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۳}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$

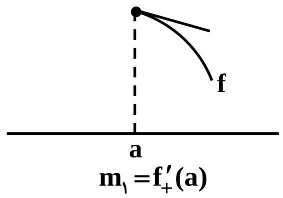
۳) -۱ ۴) ۱

MMS

(٤) مشتق راست

اگر تابع f در $x=a$ فقط از راست پیوسته باشد و مشتق راست f در $x=a$ وجود داشته باشد آنگاه تابع f در $x=a$ فقط از راست مشتق‌پذیر است و :

$$f'_{+}(a)=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



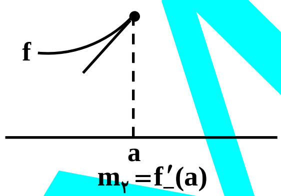
از نظر هندسی یک نیم‌مماس راست غیرعمودی بر تابع f در نقطهٔ a وجود دارد که شیب آن برابر است با:

$$m_1=f'_{+}(a)$$

(٥) مشتق چپ

اگر تابع f در $x=a$ فقط از چپ پیوسته باشد و مشتق چپ f در $x=a$ وجود داشته باشد آنگاه تابع f در $x=a$ فقط از چپ مشتق‌پذیر است و :

$$f'_{-}(a)=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



از نظر هندسی یک نیم‌مماس چپ غیرعمودی بر نمودار تابع f در نقطهٔ a وجود دارد که شیب آن برابر است با:

$$m_2=f'_{-}(a)$$

(٦) قضیه

الف) اگر تابع f روی بازهٔ $(a-\delta,a]$ پیوسته و روی بازهٔ $(a-\delta,a)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a^{-}}f'(x)$ وجود داشته باشد آنگاه:

$$f'_{-}(a)=\lim_{x\to a^{-}}f'(x)$$

ب) اگر تابع f روی بازهٔ $[a,a+\delta)$ پیوسته و روی بازهٔ $(a,a+\delta)$ مشتق‌پذیر باشد و $\lim\limits_{x\to a^{+}}f'(x)$ وجود داشته باشد آنگاه:

$$f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^{+}}f'(x)$$

(٧) نکته

الف) مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطهٔ درونی مانند a معادل با آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و با هم برابرند.

ب) طبق قرارداد برای یک تابع مانند $f:[a,b]\to\mathbb{R}$، مشتق‌پذیری f در a به معنای وجود مشتق راست f در a و مشتق‌پذیری f در b به معنای وجود مشتق چپ f در b است.

MMS

تست

۶- مشتق چپ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۱-\sqrt{۱-x^۲}}$ در نقطهٔ $x=۰$ کدام است؟ (س ۸۹)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $-\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۷- اگر $f(x)=|x-۱|[x]$، مقدار $f'(۱^+)-f'(۱^-)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲

۸- اگر $f(x)=\begin{cases} ۲x^۲+۱ & x\geq ۱ \\ x^۳+۲ & x<۱ \end{cases}$، حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱-h^۲)-f(۱)}{h^۲}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۳- ۳) ۴ ۴) ۳

۹- در تابع $y=|x-۱|+۳|x-۲|$ حاصل $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۱+h^۲)+f(۲+h^۲)-۴}{h^۲}$ کدام است؟ (آ ۸۶)

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۷- ۴) ۷

۱۰- در تابع $y=|x(x+۱)(x+۲)...(x+۱۰)|+|x+۸||x+۹|$ جمع مشتق‌های چپ و راست در $x=-۱۰$ چقدر است؟ (آ ۸۵)

۱) ۶- ۲) ۳- ۳) صفر ۴) $۲\times ۹!$

۱۱- در تابع $y=\begin{cases} x^۳ & |x|>۱ \\ ۲x^۲-۱ & |x|<۱ \end{cases}$ حاصل $\lim\limits_{\Delta x\to ۰^-}\frac{f(۱+\Delta x)-۱}{\Delta x}$ چقدر است؟ (آ ۸۶)

۱) ۴- ۲) ۴ ۳) ۳- ۴) ۳

MMS

(۲-۱۵) فرمول‌های پایه‌ای مشتق‌گیری

فرض کنید u تابعی دلخواه باشد و $k\in\mathbb{R}$. در اینصورت:

۱) $y=k \rightarrow y'=0$

۲) $y=u^n \rightarrow y'=nu'u^{n-1}$

۳) $y=ku^n \rightarrow y'=knu'u^{n-1}$

۴) $y=x^n \rightarrow y'=nx^{n-1}$ حالت خاص

۵) $y=f(u) \rightarrow y'=u'.f'(u)$

۶) $y=k.f(u) \rightarrow y'=k.u'.f'(u)$

۷) $y=f(x) \rightarrow y'=f'(x)$ حالت خاص

۸) $y=k.f(x) \rightarrow y'=kf'(x)$

۹) $y=ku \rightarrow y'=ku'$

۱۰) $y=kx \rightarrow y'=k$ حالت خاص

۱۱) $y=u\pm v \rightarrow y'=u'\pm v'$

۱۲) $y=u.v \rightarrow y'=u'v+v'u$

۱۳) $y=\frac{u}{v} \rightarrow y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}\ ,\ v\neq 0$

۱۴) $y=\sqrt[m]{u^n} \rightarrow y'=\frac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

۱۵) $y=\sqrt[m]{u} \rightarrow y'=\frac{u'}{m\sqrt[m]{u^{m-1}}}$ حالت خاص

۱۶) $y=\sqrt{u} \rightarrow y'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ حالت خاص

۱۷) $y=\sqrt{x} \rightarrow y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ حالت خاص

۱۸) $y=\frac{au+b}{cu+d} \rightarrow y'=u'\frac{ad-bc}{(cu+d)^2}$

۱۹) $y=\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$ حالت خاص

۲۰) $y=a^u \rightarrow y'=u'.a^u.\ln a$

۲۲) $y=a^x \rightarrow y'=a^x.\ln a$ حالت خاص

۲۲) $y=e^u \rightarrow y'=u'.e^u$ حالت خاص

۲۳) $y=e^x \rightarrow y'=e^x$ حالت خاص

MMS

۲۴) $y=\log_a^u \rightarrow y'=\frac{u'}{u}.\frac{۱}{\ln a}$

۲۵) $y=\ln u \rightarrow y'=\frac{u'}{u}$ حالت خاص

۲۶) $y=\ln x \rightarrow y'=\frac{۱}{x}$ حالت خاص

۲۷) $y=\sin u \rightarrow y'=u'\cos u$

۲۸) $y=\cos u \rightarrow y'=-u'\sin u$

۲۹) $y=\operatorname{tg} u \rightarrow y'=u'(۱+\operatorname{tg}^۲ u)=u'.\sec^۲ u$

۳۰) $y=\operatorname{cotg} u \rightarrow y'=-u'(۱+\operatorname{cotg}^۲ u)=u'.\csc^۲ u$

۳۱) $y=\sin^{-۱} u , \cos^{-۱} u \rightarrow y'=\frac{\pm u'}{\sqrt{۱-u^۲}}$

۳۲) $y=\operatorname{tg}^{-۱} u , \operatorname{cotg}^{-۱} u \rightarrow y'=\frac{\pm u'}{۱+u^۲}$

مثال ۱. معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^۲$ را بوسیلهٔ فرایند حد در نقطهٔ $x=۱$ بدست آورید.

مثال ۲. آیا تابع‌های زیر در نقطهٔ داده شده خط مماس دارند. اگر پاسخ مثبت است معادلهٔ خط مماس را بنویسید.

الف) $f(x)=\sin x \quad , \quad x=۰$

ب) $g(x)=|\sin x| \quad , \quad x=۰$

پ) $h(x)=|x^۲-۱| \quad , \quad x=۱$

مثال ۳. آیا تابع $f(x)=|x|$ در $x=۰$ مشتق‌پذیر است؟

MMS

مثال ٤. مشتق تابع $f(x)=x|x|$ را در $x=0$ تعیین کنید.

تست

۱۲- مشتق عبارت $\left(\frac{16}{x}-\sqrt[3]{x^2}\right)^2$ به ازای $x=-8$ کدام است؟ (س ۸۸)

۱) -1 ۲) 1 ۳) $-\frac{1}{2}$ ۴) 2

۱۳- مشتق تابع $y=\frac{\sqrt[3]{x^2}+1}{x+\sqrt[3]{x}}$ به ازای $x=1$ کدام است؟ (آ ۸۹)

۱) $-\frac{1}{9}$ ۲) $\frac{1}{9}$ ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{1}{3}$

۱۴- اگر $g(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x^2+6x+9}$ و $f(x)=\frac{1}{x+3}$ باشد حاصل $\frac{g'f'-f''g}{f'^2}$ در $x=4$ کدام است؟ (آ ۸۵)

۱) $\frac{3}{4}$ ۲) $-\frac{3}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) صفر

۱۵- مشتق تابع $y=(\sin x+\cos x)^4-2\sin 2x$ در $x=\frac{3\pi}{16}$ کدام است؟ (آ ۸۶)

۱) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۳) $-\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{2}$

MMS

۱۶- اگر $f(x)=\frac{\cos^۲ x}{۱+\sin^۲ x}$، مقدار $f\left(\frac{\pi}{۴}\right)-۳f'\left(\frac{\pi}{۴}\right)$ برابر کدام است؟ (س ۸۸)

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۷- اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+\sin x}$ و $g(x)=\frac{x^۲+\sin^۲ x+۲x\sin x}{x+۱}$، آنگاه $۲ff'g+g'f^۲$ به ازای $x=۱$ کدام است؟ (آ۸۴)

۱) ۱ ۲) $-\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۸- مشتق تابع $y=\ln\frac{\sqrt{x+۱}}{x^۳}$ به ازای $x=۳$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۸}$ ۲) $\frac{۴}{۹}$ ۳) $-\frac{۷}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۱۹- مشتق تابع $f(x)=\ln(\ln\sin x)$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $\frac{\operatorname{tg}x}{\ln(\cos x)}$ ۲) $\frac{\operatorname{tg}x}{\ln(\sin x)}$ ۳) $\frac{\cot g x}{\ln(\cos x)}$ ۴) $\frac{\cot g x}{\ln(\sin x)}$

MMS

(۱۵-۳) مشتق توابع زوج و فرد

(۱) نکته

الف) مشتق تابع زوج، تابعی فرد است. داریم:

$$f(-x)=f(x) \rightarrow -f'(-x)=f'(x) \rightarrow f'(-x)=-f'(x)$$

ب) مشتق تابع فرد، تابعی زوج است. داریم:

$$f(-x)=-f(x) \rightarrow -f'(-x)=-f'(x) \rightarrow f'(-x)=f'(x)$$

پ) هرگاه f تابعی زوج باشد آنگاه:

$$f'(۰)=۰$$

(۲) نکته

الف) برای مشتق راست و چپ یک تابع زوج در $x=a$ و $x=-a$ داریم:

$$f'(a^+)=-f'\left[(-a)^-\right] \quad , \quad f'(a^-)=-f'\left[(-a)^+\right]$$

ب) برای مشتق راست و چپ یک تابع فرد در $x=a$ و $x=-a$ داریم:

$$f'(a^+)=f'\left[(-a)^-\right] \quad , \quad f'(a^-)=f'\left[(-a)^+\right]$$

تست

۲۰- اگر f یک تابع زوج و $f'_+(۱)=۱$ و $f'_-(۱)=۲$ آنگاه $f'_+(-۱)$ کدام است؟

۱) ۱-　　۲) ۱　　۳) ۲　　۴) ۲-

۲۱- هرگاه $f(x)=\dfrac{x^۴+۳+۲x^۲\cos x}{(x\,tg^{-۱}x+۱)^۵}$، آنگاه مشتق تابع f در $x=۰$ کدام است؟

۱) $-\pi$　　۲) π　　۳) ۱-　　۴) صفر

۲۲- با فرض اینکه تابع f زوج و تابع g فرد و $f'(۱)=۲$ و $g'(۱)=۳$ باشند مقدار $(f+g)'(-۱)$ کدام است؟

۱) ۵-　　۲) ۵　　۳) ۱　　۴) ۱-　　(تمرین کتاب درسی)

MMS