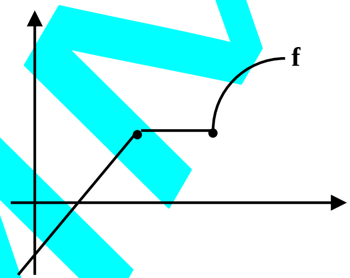
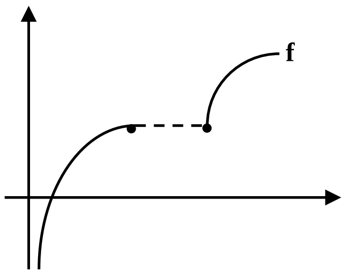
فصل شانزدهم: کاربرد مشتق

(۱۶-۱) یکنوایی و یکنوایی اکید

(۱) تابع صعودی

تابع f را روی بازه I صعودی نامند هرگاه: $\forall x_1,x_2\in I: x_1<x_2 \to f(x_1)\le f(x_2)$.

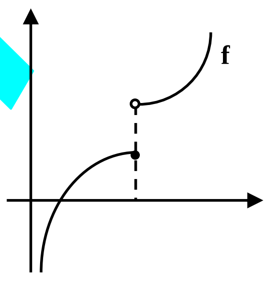


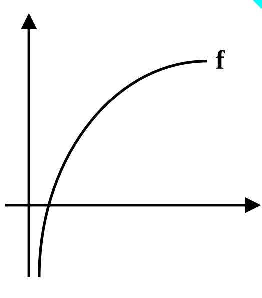


(۲) تابع صعودی اکید

تابع f را روی بازهٔ I صعودی اکید گویند هرگاه: $\forall x_1,x_2\in I: x_1<x_2 \to f(x_1)<f(x_2)$.

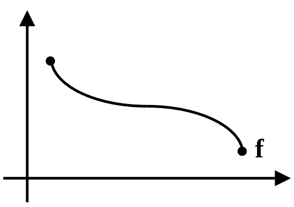
توجه کنید که اگر f روی بازهٔ I صعودی اکید باشد، آنگاه f روی این بازه صعودی نیز محسوب می‌شود.

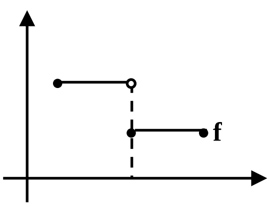




(۳) تابع نزولی

تابع f را روی بازهٔ I نزولی گویند هرگاه: $\forall x_1,x_2\in I: x_1<x_2 \to f(x_1)\ge f(x_2)$.

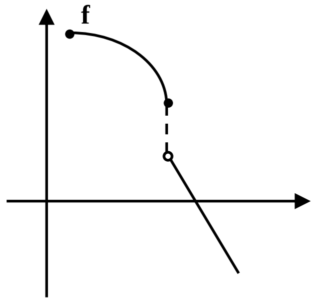


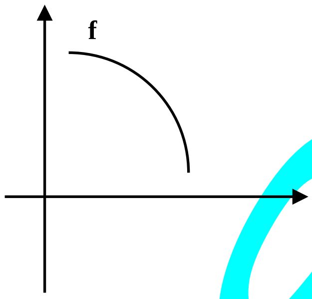


(۴) تابع نزولی اکید

تابع f را روی بازهٔ I نزولی اکید گویند هرگاه: $\forall x_1,x_2 \in I: x_1<x_2 \rightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

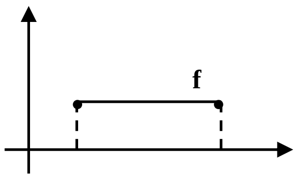
توجه کنید که اگر f روی بازهٔ I نزولی اکید باشد، آنگاه f روی این بازه نزولی نیز محسوب کرد.





(۵) تابع ثابت

تابع f روی بازهٔ I ثابت است هرگاه: $\forall x_1,x_2 \in I: f(x_1)=f(x_2)$.



(۶) قضیه

فرض کنید f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ (a,b) مشتق‌پذیر باشد. در اینصورت:

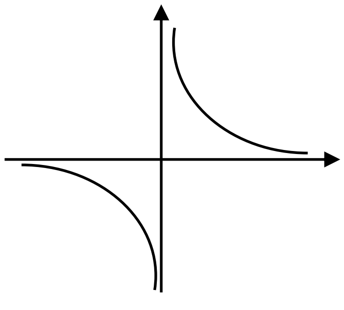
الف) اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x)>0$، آنگاه f بر $[a,b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x)<0$، آنگاه f بر $[a,b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در (a,b)، $f'(x)=0$، آنگاه f بر بازهٔ $[a,b]$ ثابت است.

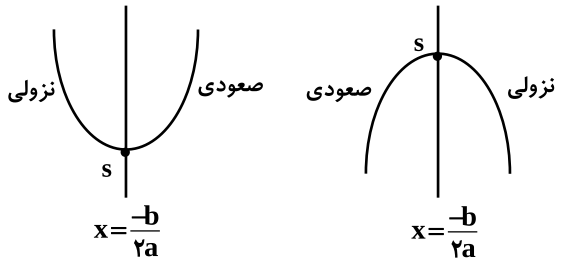
(۷) نکته

توابع در بازه‌ای که شامل مجانب قائم‌شان باشد غیریکنوا هستند و فقط می‌توانند در بازه‌ای که یکطرفِ مجانب قائم قرار بگیرد یکنوا باشند. پس نباید در توابع کسری فقط به علامت مشتق در تعیین یکنوایی اکتفا کنید. مثلاً تابع $y=\frac{1}{x}$ در دامنه‌اش $\mathbb{R}-\{0\}$ غیریکنواست اما درهر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$ نزولی اکید است. داریم:



(۸) شرط یکنوایی در توابع درجه دوم

نمودار توابع درجه دوم (سهمی‌ها) در دامنه‌شان $\mathbb{R}$ غیریکنوا می‌باشند. امّا در بازه‌ای کـه یکطـرف آن رأس سـهمی قرار گیرد یعنی $x \geq \frac{-b}{۲a}$ یا $x \leq \frac{-b}{۲a}$ یکنوای اکید است. داریم:



تست

۱. حدود a برای اینکه تابع $y=(a-۲)x^۲-x$ درفاصلهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی باشد کدام است؟ (آ ۸۱)

۱) $a>۲$ ۲) $a<\frac{۵}{۲}$ ۳) $۲<a\leq\frac{۵}{۲}$ ۴) $a\geq\frac{۵}{۲}$

۲. اگر $f(x)=\sin^{-۱}(۲x-۱)-۲\sin^{-۱}\left(\sqrt{x}\right)$ باشد حاصل $f'(x)-f(x)$ کدام است؟ (س ۸۲)

۱) π ۲) $\frac{\pi}{۲}$ ۳) صفر ۴) $-\frac{\pi}{۲}$

(۹) نکته

الف) اگر $y=f(x)$ تابعی اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد آنگاه $y=[f(x)]$ تابعی صعودی (نزولی) خواهد بود.

ب) اگر $y=f(x)$ تابعی صعودی (نزولی) باشد آنگاه $y=-f(x)$ تابعی نزولی (صعودی) خواهد بود.

پ) اگر f تابعی اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد آنگاه $\frac{۱}{f}$ تابعی اکیداً نزولی (اکیداً صعودی) خواهد بود.

ت) اگر f تابعی اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) باشد آنگاه $f^{-۱}$ اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) خواهد بود.

ث) اگر f و g هر دو تابع صعودی (نزولی) باشند آنگاه تابع $f+g$ تابعی صعودی (نزولی) خواهد بود.

ج) اگر f و g هر دو توابعی صعودی (نزولی) و مثبت باشند آنگاه تابع $f.g$ نیز تابعی صعودی (نزولی) خواهد بود.

ح) اگر f تابعی اکیداً صعودی (اکیداً نزولی) و g تابعی صعودی (نزولی) باشد آنگاه $f+g$ تابعی اکیداً صعودی (اکیـداً نزولی) خواهد بود.

(۱۰) ترکیب توابع یکنوا

الف) اگر f تابعی صعودی و g تابعی نزولی باشد آنگاه fog تابعی نزولی است.

ب) اگر f تابعی نزولی و g تابعی صعودی باشد آنگاه fog تابعی نزولی است.

پ) اگر f و g هر دو توابع صعودی یا هردو توابع نزولی باشند آنگاه fog تابعی صعودی است. (تغییرات در تابع fog یا gof مانند ضرب علامت‌هاست.)

تست

۳. تابع $y=\frac{x}{x^۲+۱}$ در چه بازه‌ای صعودی است؟

۱) $[-۲,۲]$	۲) $\left[-۲,\frac{۱}{۲}\right]$	۳) $\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}\right]$	۴) $\left[-\frac{۱}{۲},۲\right)$

۴. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{x}{۱-x^۲}$ بر کدام بازه صعودی است؟ (س ۸۰)

۱) $(-۲,۲)$	۲) $(۰,۲)$	۳) $(-\infty,-۲)$	۴) $(-۲,۰)$

۵. با چه شرطی تابع $y=ax^۳+bx^۲+۱$ صعودی اکید است؟ (آ ۸۷)

۱) $a>۰,b=۰$	۲) $ab=۱$	۳) $a\neq۰,b\neq۰$	۴) $ab=-۱$

۶. به ازای چه مقادیری از a تابع $y=\frac{ax-۳}{x+۲-a}$ برای $x>-۵$ نزولی است؟

۱) $-۳\leq a<۳$	۲) $a\leq-۳$	۳) $a<-۱$ یا $a>۳$	۴) $-۱<a<۳$

۷. تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۲x-۳$ با دامنهٔ $\{x:|x-۱|<۲\}$ همواره چگونه است؟ (س ۹۱)

۱) نزولی	۲) صعودی	۳) مثبت	۴) منفی

۸- حدود a برای آنکه تابع $y=(a-۲)x^۲-x$ در فاصلهٔ $[۱,+\infty)$ صعودی باشد، کدام است؟ (آ ۸۱)

۱) $a\geq\frac{۵}{۲}$	۲) $۲<a\leq\frac{۵}{۲}$	۳) $a<\frac{۵}{۲}$	۴) $a>۲$

(۱۶-۲) نقطهٔ بحرانی

(۱) تعریف

نقطهٔ درونی $c \in D_f$ را نقطهٔ بحرانی می‌گویند هرگاه:

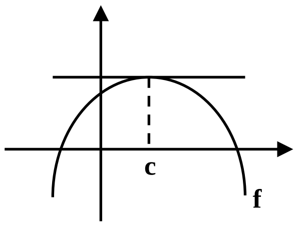
$f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد. طبق تعریف، نقاط مرزی بازه جزء نقاط بحرانی محسوب نمی‌شوند.

(۲) نکته

در یک تابع نقاط ناپیوستگی، زاویه‌دار، بازگشتی و عطف قائم نقاط بحرانی‌اند.

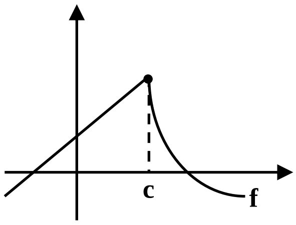
(۳) بررسی نقاط بحرانی از نقطه نظر هندسی

الف) نقاطی که در آنها مماس افقی بر منحنی f رسم می‌شود.



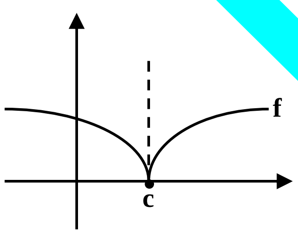
ب) نقاط زاویه‌دار (گوشه‌ای)

$f'(c)$ موجود نیست.

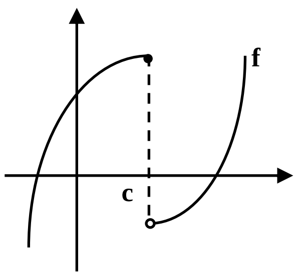


پ) نقاط بازگشتی

$f'(c)=\infty$ می‌باشد.



د) نقاط ناپیوستگی تابع



مثال ۱. هر یک از توابع زیر چند نقطهٔ بحرانی دارند؟

الف) $f(x)=|x-1|+|x-2|$

ب) $g(x)=|x-1|+2|x-2|$

پ) $h(x)=\operatorname{sgn}[x]$

ت) $k(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$

ث) $r(x)=tgx.\cot gx$

مثال ۲. مجموع طول‌های نقاط بحرانی تابع $y=\sqrt[3]{x^3-12x+11}$ در بازهٔ $[-4,3]$ را بدست آورید.

تست

۹. تعداد نقاط بحرانی با ضابطهٔ $f(x)=\left|x^{۳}-x\right|$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ کدام است؟ (س ۹۰)

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۳

۱۰. تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x^{۲}-۴x & x\geq ۰ \\ ۱-۴x & x<۰ \end{cases}$ چند نقطهٔ بحرانی دارد؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۰

۱۱. مجموعهٔ طول‌های نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x-۲|\sqrt[۳]{x^{۲}}$ کدام است؟ (س ۸۵)

۱) $\left\{\frac{۲}{۳},۲\right\}$ ۲) $\{۰,۱\}$ ۳) $\left\{۰,\frac{۲}{۳},۲\right\}$ ۴) $\left\{۰,\frac{۴}{۵},۲\right\}$

۱۲. نقطهٔ بحرانی تابع f با ضابطهٔ $f(x)=x^{\frac{۴}{۳}}-x^{\frac{۲}{۳}}$ بر $[-۱,۱]$ کدام است؟ (س ۸۰)

۱) $\frac{\sqrt{۲}}{۲},۰,-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۴},۰,-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۴},-\frac{\sqrt{۲}}{۴}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۲},-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۳. نقاط بحرانی تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}(x-۲)^{۲}$ سه رأس یک مثلث‌اند. نوع این مثلث کدام است؟ (س ۸۵)

۱) قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ۲) فقط قائم‌الزاویه

۳) فقط متساوی‌الساقین ۴) متساوی‌الاضلاع