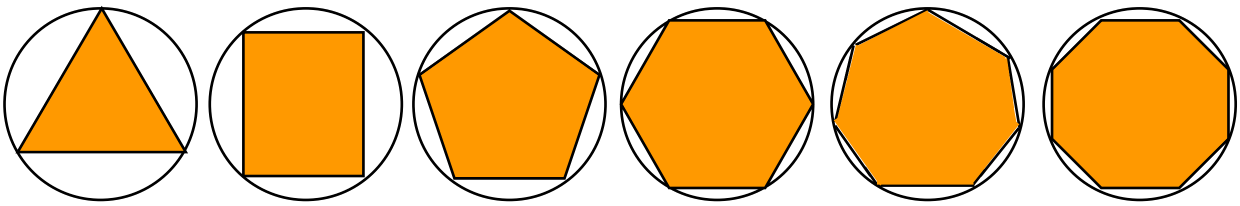
فصل پنجم: انتگرال مقدماتی

(۵-۱) مسألهٔ مساحت

(۱) مقدمه

فرمول‌های مربوط به مساحت چند ضلعی‌ها، نظیر مربع، مستطیل، مثلث و ذوزنقه از زمان‌های شروع تمدن‌های نخستین به خوبی شناخته شده بوده است. با این حال مسألهٔ یافتن فرمولی برای بعضی نواحی که با مرزهای منحنی‌الخط هستند (که دایره ساده‌ترین آنهاست) برای ریاضیدان اولیه تقریباً غیرممکن بوده است.

اولین پیشرفت واقع‌بینانهٔ محاسبهٔ چنین مساحت‌هایی توسط ریاضیدان یونانی به نام ارشمیدس صورت گرفت. ارشمیدس توانست مساحت ناحیه‌های با مرزهای محدود به قوس‌های دایره، سهمی و منحنی‌های دیگر را با استفاده از روش خارق‌العاده‌ای که امروزه به روش "رافنا" مشهور است، محاسبه کند. در چنین روشی بری محاسبهٔ دایره از درج چندضلعی‌های منتظم در درون دایره (چندضلعی‌های محاطی) استفاده می‌شود. بطوریکه تعداد اضلاع این چندضلعی‌ها متوالیاً زیاد و زیادتر شده و به نحو نامحدودی افزایش می‌یابد.



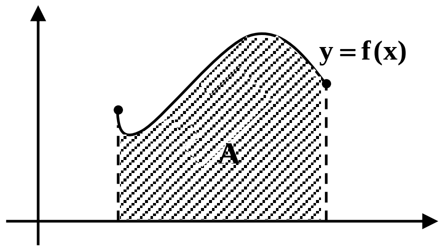
همچنانکه تعداد اضلاع چنین چند ضلعی‌هایی افزایش می‌یابد، چندضلعی به پُر کردن ناحیه درون دایره متمایل شده و در نتیجه مساحت این چندضلعی‌ها تقریب‌های بهتر و بهتری از مساحت دقیق دایره بدست می‌دهد.

اما یونانیان باستان از مفهوم "بینهایت" خوششان نمی‌آمد و لذا در بررسی‌های مربوط به ریاضیات از آن احتراز می‌کردند. به این ترتیب این روش تا زمان نیوتون و لایب نیتز باقی ماند. کسانیکه روشی کلّی برای محاسبهٔ مساحت با استفاده ضمنی از مفهوم حد ارائه کردند. ما در این فصل به مطالعه و بررسی مسألهٔ مساحت می‌پردازیم.

(۲) مسأله مساحت

مسأله مساحت چنین بیان می‌شود:

"با داشتن تابع پیوسته و نامنفی f که بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده است مساحت بین نمودار تابع f و بازهٔ $[a,b]$ بر محور x را پیدا کنید؟"



(۳) نکته

گرچه انتگرال در رابطه با مسألهٔ مساحت (در حالت کلّی حجم) می‌باشد امّا از این مفهوم برای بررسی و مطالعهٔ بسیاری از نظریه‌ها و مسأله‌ها در ریاضیات، فیزیک و سایر علوم استفاده می‌شود.

(۵-۲) نماد سیگما و ویژگی‌های آن

(۱) نکته

در مطالعه و محاسبهٔ مساحت‌ها که در بخش بعدی به آن می‌پردازیم با مجموعه‌هایی متناهی از مقدارهای یک تابع سر و کار خواهیم داشت. در این قسمت نمادی را معرفی می‌کنیم که برای نمایش یک مجموع با تعداد متناهی جمله بکار می‌رود. سپس با استفاده از این نماد، روش‌های مختلف محاسبهٔ چنین مجموعه‌هایی را بررسی می‌کنیم.

(۲) نماد سیگما

فرض کنید m و n دو عدد صحیح و $m\le n$ و همچنین f تابعی باشد که بر اعداد صحیح $\sum_{i=m}^{n} f(i)$ تعریف شده باشد. در اینصورت نماد سیگما که آنرا بصورت $\sum$ نمایش می‌دهند به معنی حاصلجمع مقادیر تابع f از m تا n می‌باشد. یعنی:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)=f(m)+f(m+1)+\ldots+f(n)$$

(۳) نکته

الف) مجموع سمت راست این تساوی را "بسط مجموع" می‌نامند.

ب) حرف i را اندیس جمع‌بندی (یا شمارنده) می‌نامند.

پ) دو عدد m و n را حدود جمع‌بندی می‌نامند. m را حد پایین و n را حد بالا می‌گویند.

مثلاً:

$$\sum_{i=1}^{5} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2=55$$

مثال ۱. حاصلجمع‌های زیر را با استفاده از نماد سیگما بنویسید.

الف) $1+2+3+\ldots+19+20=$

ب) $x^0+x^1+x^2+\ldots+x^{n-1}+x^n=$

پ) $\underbrace{1+1+\ldots+1}_{n \text{ بار}}=$

ت) $\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}=$

٤) نکته

الف) می‌توان از یک متغیر اندیس‌دار مانند a_i به جای نماد تابعی $f(i)$ استفاده کرد. یعنی:

$$\sum_{i=m}^{n} f(i)=\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \dots + a_n$$

ب) وقتی تعداد جملات نامتناهی باشد چنین مجموعی را یک "سری نامتناهی" می‌نامند. یعنی:

$$\sum_{i=m}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

٥) ویژگی‌های سیگما

فرض کنید $\sum_{i=m}^{n} a_i$ و $\sum_{i=m}^{n} b_i$ معنادار و $c\in\mathbb{R}$ در اینصورت:

الف) $\sum_{i=m}^{n}(a_i \pm b_i)=\sum_{i=m}^{n} a_i \pm \sum_{i=m}^{n} b_i$

ب) $\sum_{i=m}^{n} ca_i = c\sum_{i=m}^{n} a_i$

ویژگی‌های فوق را ویژگی‌های خطی سیگما می‌گویند. این دو ویژگی را بصورت زیر نیز بیان می‌کنند:

پ) $\sum_{i=m}^{n}(c_1 a_i + c_2 b_i)=c_1\sum_{i=m}^{n} a_i + c_2\sum_{i=m}^{n} b_i$

که در آن: $c_1, c_2 \in\mathbb{R}$.

ت) $\sum_{i=m}^{n} c=(n-m+1)c \xrightarrow[m=1]{\text{حالت خاص}} \sum_{i=1}^{n} c = nc \quad , \quad c\in\mathbb{R}$

ث) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$

مثلاً:

I) $\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k$

II) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+h)=\sum_{i=1}^{n} a_i + nh$

III) $\sum_{i=1}^{5} 10^i + \sum_{i=6}^{9} 10^i = \sum_{i=1}^{9} 10^i$

IV) $\sum_{i=1}^{10} 2 = 2(10-1+1)=20$

V) $\sum_{n=1}^{1000}\frac{n+1}{n}=\sum_{n=1}^{1000}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1000+\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{n}$

VI) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\infty$

(٦) تغییر اندیس سیگما

با استفاده از فرمول زیر، می‌توان اندیس سیگماها را تغییر داد. داریم:

$$\sum_{i=m}^{m+n} f(i) = \sum_{i=0}^{n} f(i+m) = f(m) + f(m+1) + \ldots + f(m+n)$$

این فرمول را بصورت‌های زیر نیز می‌نویسند:

الف) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m+k}^{n+k} a_{i-k}$

ب) $\sum_{i=m}^{n} a_i = \sum_{i=m-k}^{n-k} a_{i+k}$

مثلاً:

$$\sum_{k=2}^{8} (k+2)^2 = \sum_{k=4}^{10} k^2$$

$$\sum_{k=2}^{8} (k+2)^2 = \sum_{k=0}^{6} (k+4)^2$$

همچنین:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \frac{1}{(k-4)(k-3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

مثال ۲. عبارت $\sum_{i=3}^{17} \sqrt{1+i^2}$ را بصورت $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ بنویسید.

مثال ۳. عبارت $\sum_{i=a+1}^{12} (b+i)^3$ را بصورت $\sum_{i=1}^{n} f(i)$ بنویسید.

مثال ٤. اگر $a_1 = 2$ و $\sum_{k=3}^{9} a_{k-1} = 59$ باشند حاصل $\sum_{k=0}^{7} a_{k+1}$ چقدر است؟

مثال ۵. اگر $\sum_{n=2}^{70} (n^3 + 4n) = 2A - 1$ باشد حاصل $\sum_{n=0}^{71} (n-1)^3 + 4(n-1)$ را بدست آورید؟

(۷) معرفی چند سیگما

وقتی که $n\to\infty$ داریم:

الف) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}\sim\frac{n^2}{2}$

ب) $\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)\sim n^2$

پ) $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=\sum_{i=1}^{n}2i-\sum_{i=1}^{n}1=n(n+1)-n=n^2$

ت) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\sim\frac{n^3}{3}$

ث) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+\dots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\sim\frac{n^4}{4}$

ج) $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}\sim\frac{n^5}{5}$

ح) $\sum_{i=1}^{n} r^{i-1}=1+r+r^2+r^3+\dots+r^{n-1}=\frac{r^n-1}{r-1}\ ,\quad r\neq 1$

که این همان مجموع جملات یک تصاعد هندسی با قدر نسبت r می‌باشد.

مثال٦. جمع‌های زیر را با استفاده از نماد $\sum$ بنویسید. (توجه کنید که جواب منحصر بفرد نمی‌باشند)

الف) $5+6+7+8+9=$

ب) $\underbrace{2+2+\dots+2}_{\text{۲۰۰ بار}}=$

پ) $2^2-3^2+4^2-5^2+\dots-99^2=$

ت) $1+2x+3x^2+4x^3+\dots 100x^{99}=$

ث) $1+x+x^2+x^3+\dots x^n=$

ج) $1-x+x^2-x^3+\dots x^{2n}=$

ح) $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=$

خ) $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\dots+\frac{n}{2^n}=$

مثال۷. اگر $\sum_{k=1}^{n}(3k+2)=55$ باشد مقدار $\sum_{k=1}^{n}k$ را بدست آورید.

مثال۸. مقدار سیگمای مقابل را بدست آورید.

$$\sum_{k=1}^{10}\frac{2k^3+3k^2}{4k}$$

مثال۹. اگر $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=9$ و $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=7$ باشد، a_1 را بدست آورید. $(\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ a_n\geq 0)$

(۸) نکته

در محاسبات مربوط به سیگما می‌توانیم حدود سیگما را تغییر دهیم و بعضی از جملات مورد نیاز را از سیگما بیرون آوریم. مثلاً:

$$A=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{10}=\sum_{k=4}^{10}\frac{1}{k}=\sum_{k=4}^{8}\frac{1}{k}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}$$

مثال۱۰. حاصل $A=\sum_{n=1}^{9}\left((n-5)^3+3n-17\right)$ را بدست آورید. (آ ۸۷)

(۹) خاصیت تلسکوپی (ادغام)

اگر بخواهیم سیگمای تفاضل دو جملهٔ متوالی از یک دنباله را حساب کنیم می‌توانیم از خاصیت تلسکوپی (ادغام) بصورت زیر استفاده کنیم:

$$\sum_{k=m}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_m-a_{n+1}\quad,\quad m<n$$

مثال ۱۱. حاصل $A=\sum_{n=1}^{100}\log\frac{n+2}{n+1}$ را بدست آورید. (س ۸۰)

(۱۰) حالت‌های خاص قاعدهٔ ادغام

الف) $\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k(k+m)}=\frac{1}{m}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{m}\right)$

ب) $\sum_{k=m}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)\dots(k+m)}=\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m!}$

مثال ۱۲. حاصل عبارت $\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ را بیابید.

$$\sum_{n=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

مثال ۱۳. حاصل $\sum_{k=m+1}^{n}(6k^2-4k+3)$ را که در آن $1\le m\le n$ است را بدست آورید.

$$\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k+3)=$$

(۱۱) تفکیک کسرها (تجزیه کسرها)

در این قسمت روش‌های تفکیک کسرها را با استفاده از مثال توضیح می‌دهیم:

الف) روش متّحدسازی:

فرض کنید می‌خواهیم کسر $\frac{1}{k^2+k}$ را تفکیک کنیم. ابتدا مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم:

$$\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k(k+1)}$$

اینک چون در مخرج کسر، دو عبارت k و $k+1$ وجود دارد کسر مذکور را مساوی مجموع دو کسر با مخرج‌های k و $k+1$ قرار می‌دهیم و در صورت این دو کسر دو ضریب مانند A و B در نظر می‌گیریم. یعنی:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}$$

حال هدف اینست که مقادیر A و B را بدست آوریم. برای این منظور به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)} \to A(k+1)+Bk=1$$

$$\to (A+B)k+A=1$$

این عملیات را "متحدسازی" می‌گویند. به این معنا که دو عبارت سمت چپ و سمت راست تساوی فوق را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم. مخرج‌های دو طرف با هم برابرند. لذا صورتها نیز باید با هم برابر باشند. در صورتِ کسر سمت چپ یک عبارت از درجهٔ صفر داریم بهمین ترتیب صورتِ کسر سمت راست نیز باید از درجهٔ صفر باشد. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A=1 \end{cases}$$

بنابراین: $B=-1$. لذا:

$$\frac{1}{k^2+k}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

ب) روش دوم:

فرض کنید می‌خواهیم کسر $\frac{1}{k^3-k}$ را تجزیه کنیم. در این روش نیز مشابه روش الف) ابتدا مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{1}{k^3-k}=\frac{1}{k(k^2-1)}=\frac{1}{k(k+1)(k-1)}$$

سپس از متحدسازی استفاده می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{1}{k(k+1)(k-1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k-1}$$

$$\rightarrow 1 = A(k+1)(k-1) + Bk(k-1) + Ck(k+1)$$

حال در اینجا به k مقادیر ۱، ۰ و ۱- (ریشه‌های مخرج) را نسبت می‌دهیم. داریم:

$$\text{if}: \ k=1 \rightarrow 1 = 2C \rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\text{if}: \ k=0 \rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1$$

$$\text{if}: \ k=-1 \rightarrow 1 = 2B \rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\text{Thus}: \frac{1}{k^3-k} = \frac{-1}{k} + \frac{\frac{1}{2}}{k+1} + \frac{\frac{1}{2}}{k-1}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-2}{k} + \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k-1}\right)$$

پ) روش سوم:

فرض کنید می‌خواهیم کسر $\frac{1}{k^2-2k}$ را تجزیه کنیم. باز هم در ابتدا مخرج کسر را تجزیه می‌کنیم. داریم:

$$\frac{1}{k^2-2k} = \frac{1}{k(k-2)}$$

حال در صورت کسر، حاصل تفاضل عوامل مخرج کسر را ظاهر می‌کنیم:

$$k-(k-2) = 2$$

همانطور که مشاهده می‌شود در این مثال اختلاف عوامل مخرج، ۲ است. اما در صورت کسر عدد ۱ را داریم. پس باید صورت کسر را در عدد ۲ ضرب کنیم. چون عدد ۲ در اصلِ کسر داده شده وجود نداشته لذا کل کسر را بر ۲ نیز تقسیم می‌کنیم تا به کلیّت کسر خللی وارد نشود. به عبارت دیگر کسر را در عدد ۲ ضرب و تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{k(k-2)} = \frac{1}{2} \times \frac{k-(k-2)}{k(k-2)} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k}\right)$$

بنابراین:

$$\frac{1}{k^2-2k} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k}\right)$$

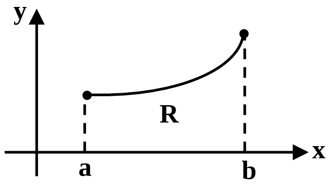
مثال ۱۴. کسر $\frac{1}{k^2+2k-8}$ را تجزیه کنید.

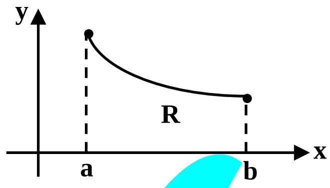
مثال۱۵. کسر $\frac{1}{(k-1)(k+2)}$ را تفکیک کنید.

(۵-۳) مساحت به عنوان حد مجموع

(۱) مقدمه

در این بخش روشی را تحت عنوان "روش مستطیل" برای بدست آوردن مساحت ناحیه‌ای مانند R را که تحت نمودار تابع پیوسته و نامنفی $y=f(x)$ و محدود به دو خط قائم $x=a$، $x=b$ و محور xها است، معرفی می‌کنیم.





در ابتدا یادآور می‌شویم که:

الف) روش‌های دیگری نیز وجود دارند که می‌توان از آنها برای محاسبهٔ مساحت چنین ناحیه‌هایی استفاده کرد مانند روش سیمپسون، روش ذوزنقه و روش نقطه میانی.

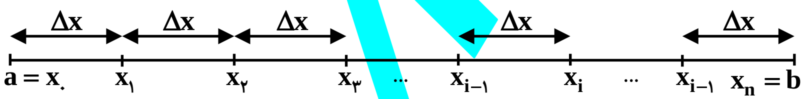
ب) همانطور که در (۵-۱) بدان اشاره شد برای محاسبهٔ مساحت شکل‌هایی که با منحنی‌ها ساخته می‌شوند مجبور به استفاده از مفهوم تقریب (اضافی، نقصانی) هستیم. چنانکه "برتراندراسل" (ریاضیدان و فیلسوف انگلیسی) در توصیف اهمیت تقریب در علوم چنین گفته است:

"گرچه ممکن است به نظر باطل‌نما جلوه کند امّا همهٔ علوم دقیق (علوم محض)، تحت تسلّط ایدهٔ تقریب هستند."

در این قسمت نخست به بیان مفاهیم و تعاریف اولیه می‌پردازیم. سپس روش مستطیل را شرح می‌دهیم.

(۲) افراز منظم

بازهٔ $[a,b]$ را در نظر بگیرید. تقسیم این بازه به زیر بازه‌هایی با طول‌های مساوی به شکل زیر را یک افراز منظم می‌گویند. افراز را با p نشان می‌دهند.



هر یک از بازه‌های $[x_0,x_1]$، $[x_1,x_2]$ و ... را یک زیر بازه این افراز می‌گویند و داریم:

$i=1,2,\dots,n$

(۳) نکته

الف) اگر طول مشترک همهٔ زیربازه‌ها را با Δx نمایش دهیم، یعنی:

$$\Delta x_i = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_i - x_{i-1} = \dots = x_n - x_{n-1} = \Delta x$$

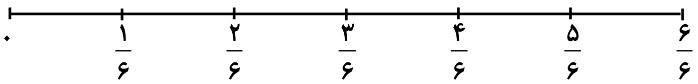
آنگاه

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \to \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad , \quad i=1,2,\dots,n$$

ب) با توجه به توضیحات فوق می‌توان چنین نوشت:

$$x_i = a + i\Delta x$$

مثلاً: شکل زیر یک افراز منظم بازهٔ $[۰,۱]$ را نشان می‌دهد که در آن $\Delta x=\frac{۱}{۶}$ است.



مثال۱۶. بازهٔ $[۱,۳]$ را به n زیربازهٔ مساوی افراز کنید.

٤) روش مستطیل

الف) با توجه به مفاهیمی که در بالا ارائه شد بر روی هر بازهٔ $[x_{i-۱},x_i]$، مستطیلی با عرض Δx_i و ارتفاع $f(x_i)$ می‌سازیم. مساحت هر مستطیل برابر است با: $f(x_i)\Delta x_i$.

حال مجموع این مساحت‌ها را بصورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$S_n=f(x_۱)\Delta x_۱+f(x_۲)\Delta x_۲+\dots+f(x_n)\Delta x_n=\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x_i$$

ب) واضح است که S_n تقریبی از مساحت ناحیهٔ R است و با افزایش n، این تقریب به مقدار واقعی مساحت R نزدیکتر می‌شود مشروط بر آنکه نقاطِ $x_۰=a<x_۱<x_۲<\dots<x_n=b$ را چنان انتخاب کنیم که عرض Δx_iها نیز به صفر میل کند. بنابراین برای یافتن مساحت R باید حد دنبالهٔ S_n را وقتی $n\to\infty$ بدست آوریم. با این شرط که طول بزرگترین Δx_iها نیز به صفر میل کند. یعنی:

$$R=\lim_{n\to\infty}S_n$$

برای این منظور کافیست در نظر بگیریم:

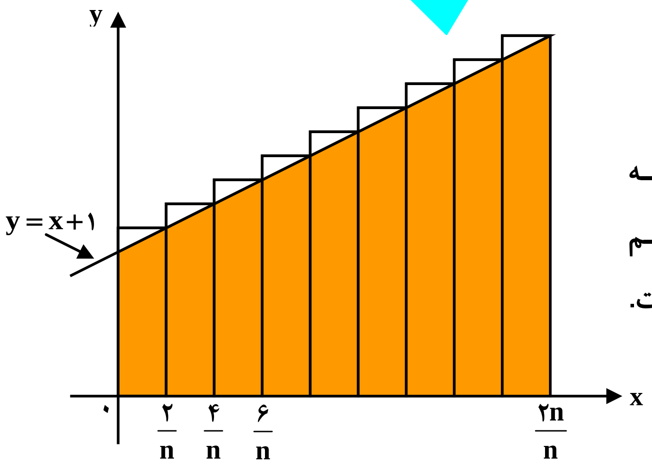
$$\Delta x_i=\frac{b-a}{n}=\Delta x$$

$$x_i=a+i\Delta x=a+\frac{i}{n}(b-a)\quad,\quad i=۱,۲,\dots,n$$

با این تعریف وقتی $n\to\infty$ داریم: $\Delta x\to ۰$.

مثال۱۷. با استفاده از روش مستطیل، مساحت ناحیه‌ای را بیابید که تحت خط مستقیم به معادلهٔ $y = x + ۱$ و محدود به خطوط $x = ۰$ و $x = ۲$ باشد.

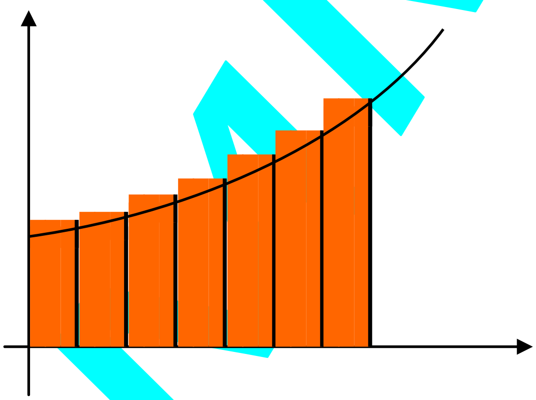
از نظر هندسی داریم:



همانطور که از نمودار پیداست این ناحیه یک ذوزنقه است. به علاوه بدون استفاده از روش مستطیل هم می‌دانستیم که مساحت این ناحیه ۴ واحد سطح است.

مثال۱۸. مساحت ناحیه‌ای را که محدود به سهمی $y=x^2$ و خطوط $y=0$ و $x=b>0$ می‌باشد بدست آورید.

از نظر هندسی داریم:



مثال۱۹. با استفاده از اتحاد $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ و قاعدهٔ تلسکوپی نشان دهید که:

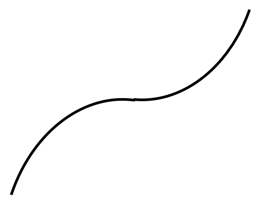
$$\sum_{i=1}^{k} i^3=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$$

مثال ۲۰. مساحت ناحیه ای را که محدود به نمودار $y=x^{۳}$ و خطوط $y=۰$، $x=۰$ و $x=b>۰$ می‌باشد بدست آورید. (راهنمایی: از اتحاد بدست آمده در مثال قبلی استفاده کنید.)

٤-٥) محاسبهٔ انتگرال معین با استفاده از مفهوم مساحت

۱) نکته

فرض کنید منحنی پیوسته‌ای مانند f بصورت زیر داشته باشیم:

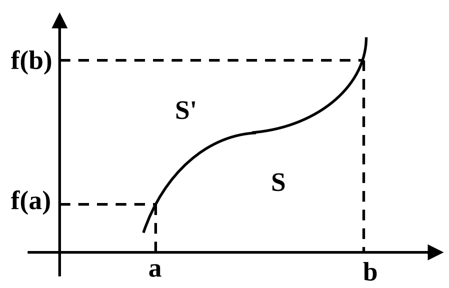


می‌توانیم این منحنی را به دو صورت تعریف کنیم:

الف) $y=f(x)$

ب) $x=f(y)$

حال فرض کنید منحنی مذکور f را در صفحه مختصات دکارتی داشته باشیم. یعنی:



همانطور که مشاهده می‌کنید تحت منحنی f در صفحه مختصات دکارتی، دو مساحت بوجود آمده است.

(I) مساحت S:

این مساحت محدود به منحنی $y=f(x)$، محور x، خطوط $x=a$ و $x=b$ است. با استفاده از مفهوم انتگـرال، S را بصورت زیر نمادگذاری می‌کنیم:

$$S=\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx$$

(II) مساحت 'S:

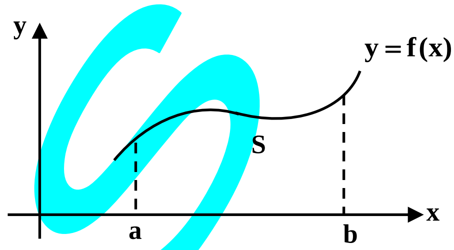
این مساحت محدود به منحنی $x=f(y)$، محور y، خطوط $y=f(a)$ و $y=f(b)$ است. با استفاده از مفهوم انتگرال، S' را بصورت زیر نمادگذاری می‌کنیم:

$$S'=\int_{y=f(a)}^{y=f(b)} f(y)\,dy$$

این مفهوم قابل تعمیم به فضای $\mathbb{R}^3$ نیز می‌باشد. ما در اینجا به بررسی مساحت نسبت به محور x می‌پردازیم.

(۲) نمادگذاری

الف) فرض کنید تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و برای هر $x\in[a,b]$، $f(x)\geq 0$. در اینصورت منظور از نماد $\int_a^b f(x)dx$ مساحت زیر نمودار $y=f(x)$ است که بالای محور x و بین خطوط $x=a$ و $x=b$ قرار دارد. مقادیر a و b را حدود انتگرالگیری می‌نامند. منظور از dx آنست که متغیر انتگرالگیری x است. (همانطور که بدان اشاره شد از نظر هندسی dx بدان معناست که ناحیه‌ای که می‌خواهیم مساحت آنرا بدست آوریم از بالا یا از پایین محدود به محور x می‌باشد.) داریم:

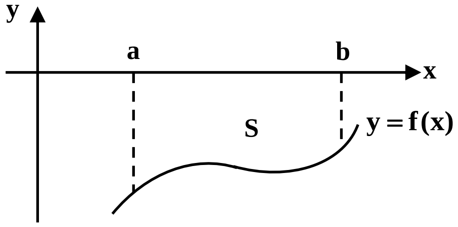


$$\int_a^b f(x)dx = I > 0 \rightarrow S = I$$

توجه کنید که انتگرال توابع نامنفی، همیشه عددی مثبت یا صفر است.

ب) فرض کنید تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و برای هر $x\in[a,b]$، $f(x)\leq 0$.

در اینصورت منظور از نماد $\int_a^b f(x)dx$ مساحت ناحیه‌ی بالای نمودار $y=f(x)$ است که پایین محور x و بین خطوط $x=a$ و $x=b$ قرار دارد. داریم:



$$\int_a^b f(x)dx = I < 0 \rightarrow S = -I$$

توجه کنید که انتگرال توابع نامثبت، همیشه عددی منفی یا صفر است.

پ) علامت $\int$ صورت کشیدهٔ حرف S است که از حرف اول کلمهٔ Sum به معنای مجموع اقتباس شده است و معادل حرف سیگما Σ یونانی است.

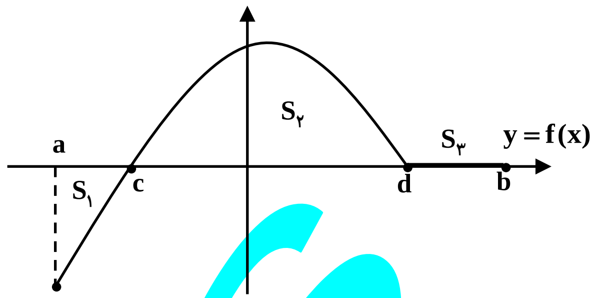
ت) وقتی می‌گویند انتگرال معین یعنی اینکه حدود انتگرالگیری یعنی بازهٔ $[a,b]$ را در اختیار داریم و هدف محاسبهٔ $\int_a^b f(x)dx$ است ولی در انتگرال نامعین، بازهٔ انتگرالگیری را نداریم یعنی باید $\int f(x)dx$ را حساب کنیم. در نتیجه:

حاصل انتگرال معین همیشه یک عدد حقیقی است که می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد ولی حاصل انتگرال نامعین، یک تابع می‌باشد.

(۳) نکته

به خاطر داشته باشید که مساحت همیشه کمیتی مثبت است در حالیکه انتگرال معین می‌تواند مثبت، منفی یا صفر باشد. به نمودار زیر توجه کنید:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^d f(x)\,dx+\int_d^b f(x)\,dx$$
$$=S_1+S_2+S_3$$



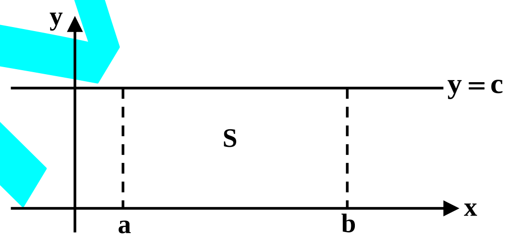
که در آن S_1 منفی، S_2 مثبت و S_3 صفر است.

حال که مقدمات ضروری و مهم را بیان کردیم با ذکر مثال‌هایی به محاسبه بعضی انتگرال‌های ساده خطی می‌پردازیم.

(٤) نکته

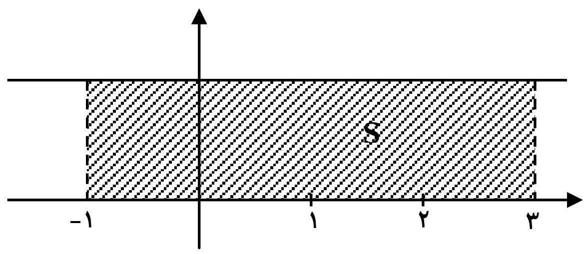
فرض کنید $c>0$ و $f(x)=c$ تابع ثابت با مقدار ثابت c باشد. سطح زیر نمودار این تابع در بازهٔ $[a,b]$ مستطیلی است به ارتفاع c و قاعدهٔ $b-a$ که همان طول فاصلهٔ انتگرالگیری است. لذا داریم:

$$S=\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b c\,dx=c(b-a)$$



مثلاً:

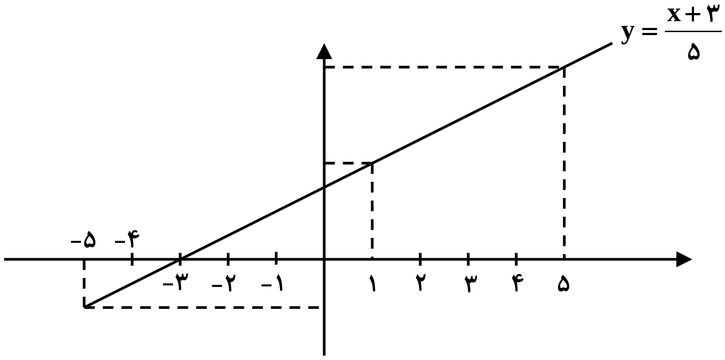
$$\int_{-1}^{3}\frac{5}{2}\,dx=\frac{5}{2}\big(3-(-1)\big)=10$$



مثال ۲۱. مقادیر انتگرال‌های معین زیر را پیدا کنید.

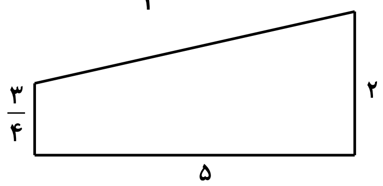
الف) $\int_{0}^{۵}\frac{x+۳}{۴}dx$ ب) $\int_{-۳}^{۱}\frac{x+۳}{۴}dx$ پ) $\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx$

حل. برای محاسبهٔ انتگرال‌ها، ابتدا نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۳}{۴}$ را رسم می‌کنیم. داریم:

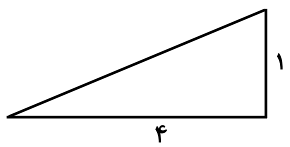


اینک داریم:

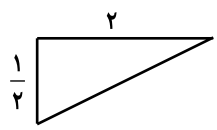
الف) انتگرال معین $\int_{0}^{۵}\frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت ذوزنقه زیر:



ب) انتگرال معین $\int_{-۳}^{۱}\frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت مثلث زیر:



پ) انتگرال معین $\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx$ برابر است با مساحت مثلث زیر:



چون مساحت زیر محور x است لذا انتگرال برابر است با:

$$\int_{-۵}^{-۳}\frac{x+۳}{۴}dx=-\frac{۱}{۲}$$