۶-انتگرال گیری مستقیم (قضایای لنگرسطح)

کاربرد اصلی روش انتگرال‌گیری مستقیم برای تعیین معادلات خیز و شیب درطول یک تیر می‌باشد. این‌روش بر مبنای بحث خمش مقاومت مصالح پایه‌ریزی شده‌است، درنتیجه باکمک این روش تنها می‌توان تغییرشکل‌های خمشی یک‌تیر را بدست‌آورد.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI} \Rightarrow \theta(x) = \frac{dy}{dx} = \int \frac{M(x)}{EI}\,dx \Rightarrow y(x) = \int \theta(x)\,dx$$

$\theta(x)$ ← معادله تغییرات شیب در طول یک تیر سه‌بابع شیب تیر

$y(x)$ ← معادله تغییرات خیز در طول یک تیر سه‌تابع خیز تیر

$M(x)$ ← معادله تغییرات لنگر خمشی در طول یک تیر

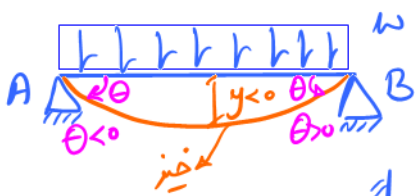
EI ← صلبیت خمشی مقطع تیر

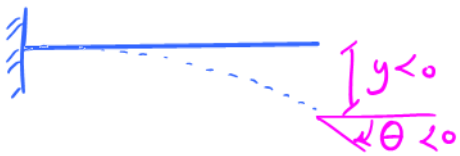
نکته چند تذکر:

در معادلات فوق قرارداد لنگر خمشی در تعیین معادله $M(x)$ منطبق بر قراردادهای رسم دیاگرام بوده و مطابق شکل زیر است

✓

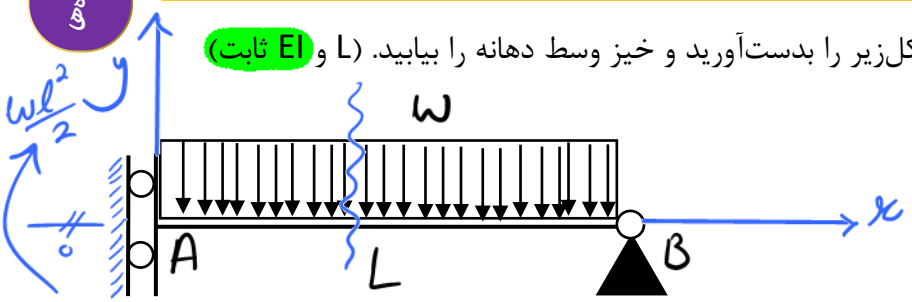
✓ در معادلات فوق، شیب مخنی تغییر شکل در جهت مثلثاتی مثبت در نظر گرفته می‌شود و خیز تیر به سمت بالا مثبت فرض می‌شود





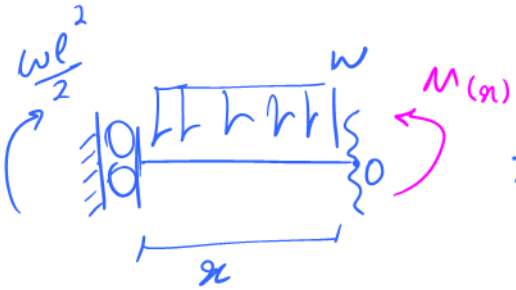
۶-انتگرال گیری مستقیم (قضایای لنگرسطح)

مثال ۶-۱ (متوسط) تابع خیز سازه شکل‌زیر را بدست‌آورید و خیز وسط دهانه را بیابید. (L و EI ثابت)



$\sum F_y = 0 \Rightarrow B_y = wl$

$\sum M = 0 \Rightarrow M_A = \frac{wl^2}{2}$



$\sum M_O = 0$

$-\frac{wl^2}{2} - w \times x \times \frac{x}{2} + M(x) = 0$

$M(x) = \frac{wl^2}{2} - \frac{wx^2}{2}$

$\theta(x) = \int \frac{M(x)}{EI} dx = \frac{1}{EI}\int_0^l \frac{wl^2}{2} - \frac{wx^2}{2} dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^2}{2}x - \frac{wx^3}{6} + C_1\right]$

تابع شیب تیر

$y = \int \theta(x)\, dx = \int_0^l \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^2}{2}x - \frac{wx^3}{6} + C_1\right] dx$

$y = \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^2x^2}{4} - \frac{wx^4}{4\times 6} + C_1 x + C_2\right]$

شرایط مرزی

$\rightarrow (x=0,\ \theta=0) \rightarrow \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^2}{2}(0) - \frac{w(0)^3}{6} + C_1\right] = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

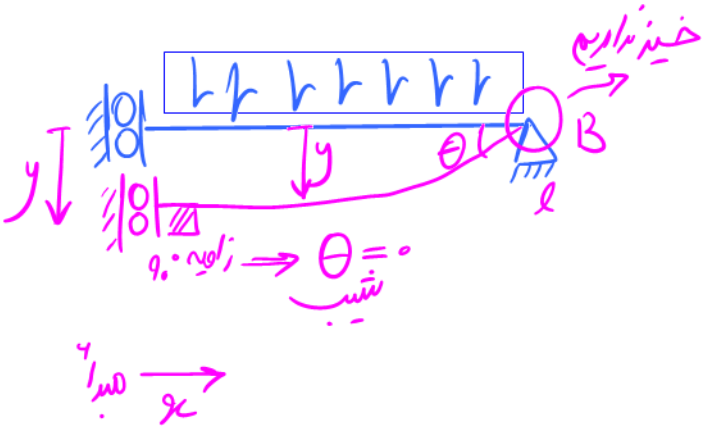
$\rightarrow (x=L,\ y=0) \rightarrow \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^2l^2}{4} - \frac{wl^4}{24} + C_1(0) + C_2\right] = 0$

$C_2 = -\frac{5wl^4}{24}$

معادله خیز تیر $y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^2}{4}x^2 - \frac{wx^4}{24} - \frac{5wl^4}{24}\right] = \frac{w}{24EI}\left[6l^2x^2 - x^4 - 5l^4\right]$

@Sazvash

توضیح شرایط مرزی سوال فوق:



$$\begin{cases} x=0 \rightarrow \text{شیب}=0 \Rightarrow \theta=0 \\ x=l \rightarrow \text{شیب} = \text{داریم} \\ \quad\quad \text{خیز} = 0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

خیز وسط دهانه:

معادله خیز: $y(x) = \frac{1}{EI}\left[\frac{wl^2}{4}x^2 - \frac{wx^4}{24} - \frac{5wl^4}{24}\right] = \frac{w}{24EI}\left[6l^2x^2 - x^4 - 5l^4\right]$

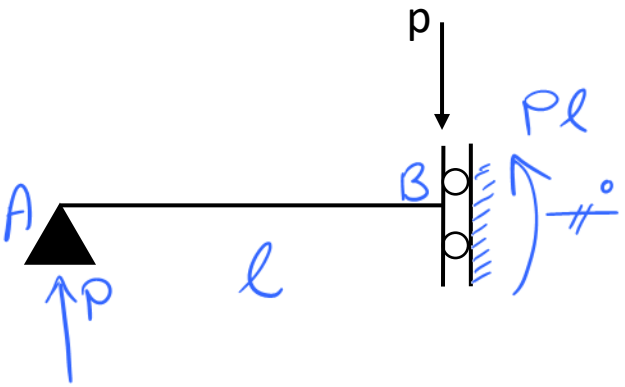
$\rightarrow x = l/2$

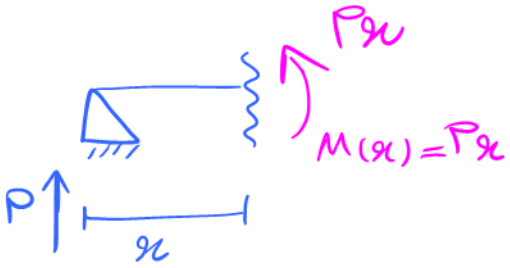
$$y(l/2) = \frac{w}{24EI}\left[6L^2(l/2)^2 - (l/2)^4 - 5L^4\right] =$$

$$\frac{w}{24EI}\left[\frac{3}{2}l^4 - \frac{l^4}{16} - 5L^4\right] = \boxed{\quad}$$

۶-انتگرال گیری مستقیم (قضایای لنگرسطح)

مثال ۶-۲(متوسط) معادله تغییرات شیب در طول تیر زیر را بدست‌آورید.. (L و EI ثابت)





$$\theta_{(x)} = \int \frac{M_{(x)}}{EI}\,dx = \int \frac{Px}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^2}{2} + C_1\right]$$

شرایط مرزی:

$x = L \rightsquigarrow \theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{EI}\left[\frac{P(L)^2}{2} + C_1\right] = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{PL^2}{2}$

انتهای تیر شیب صفر

$$\theta_{(x)} = \frac{1}{EI}\left[\frac{Px^2}{2} - \frac{PL^2}{2}\right]$$

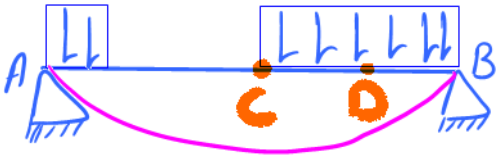
معادله شیب تیر

@Sirzamesh

۶-انتگرال گیری مستقیم (قضایای لنگرسطح)

قضایای لنگرسطح : تیر AB را که تحت بارگذاری دلخواهی قراردارد را درنظر بگیرید، برای این تیر نمودار تغییرات M/EI را رسم می‌کنیم که از تقسیم مقدار لنگر در هرنقطه از دیاگرام خمشی بر صلبیت خمشی بدست می‌آید. با استفاده از معادلات آموخته از صفحه قبل می‌توانیم بنویسیم :

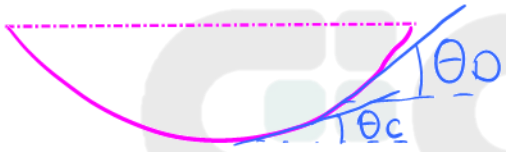
قضیه اول لنگرسطح



نقاط C و D را فرض میکنیم

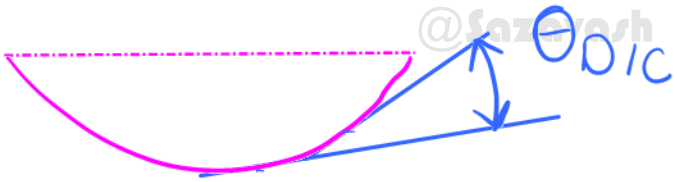
مماس برنقطه C و D رسم می کنیم و نسبت به افق θ_C و θ_D را بدست می آوریم :

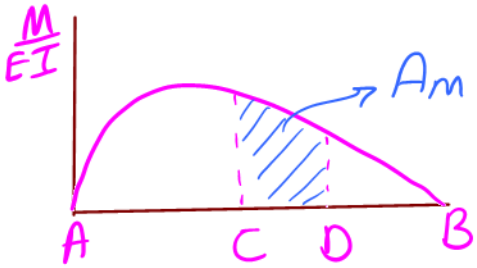
مختص تغییر شکل



سطح زیر نمودار M/EI بین نقاط C و D

$\theta_{D/C}$ =





دیاگرام لنگر خمشی

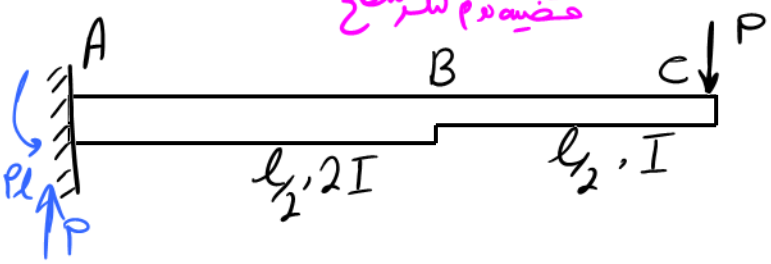
اختلاف شیب بین نقاط C و D $= \theta_{C/D}$

$$\theta_{C/D} = \theta_C - \theta_D = \int_C^D \frac{M(x)}{EI} = A_m$$

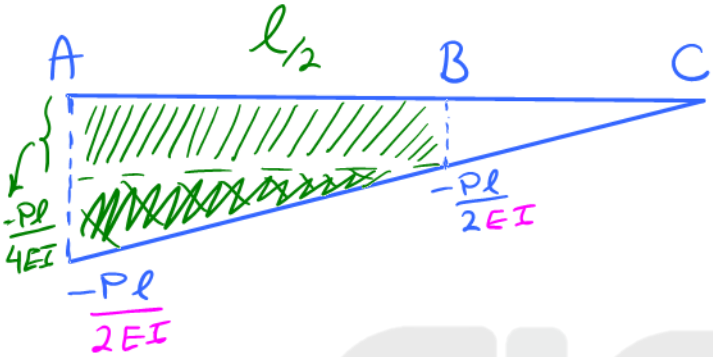
۶-انتگرال گیری مستقیم (قضایای لنگرسطح)

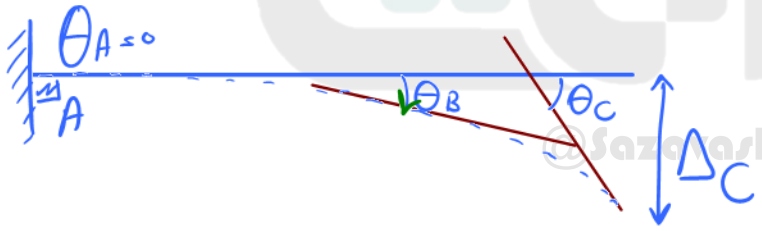
مثال ۶-۳(متوسط) با استفاده از قضیای لنگر سطح مقادیر شیب و تغییرمکان نقاط B و C را بدست‌آورید.

قضیه دوم لنگر سطح



دیاگرام $\frac{M}{EI}$





اختلاف شیب بین نقاط A, B

$$\theta_{B/A} = \theta_B = \frac{1}{2}\left[\frac{-PL}{4EI}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{l}{2} \times \frac{-Pl}{4EI}\right] \Rightarrow$$

$$\theta_B = -\frac{3Pl^2}{16EI}$$

علامت منفی یعنی شیب در خلاف جهت مثبت مثلثاتی است.