حسابان (۱)

یازدهم ریاضی

۵

حد و پیوستگی توابع

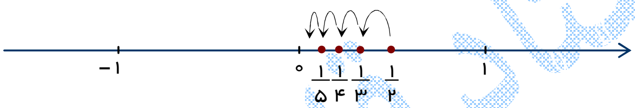
۱ فرآیند مِیل کردن

در این بخش، در مورد تابعی مانند $y=f(x)$، متغیر x را به یک عدد مِیل داده و تاثیر آن را بر رفتار مقادیر $f(x)$ بررسی خواهیم کرد. مفهوم میل کردن را با نمونه‌هایی ببینیم:

مثال: الف) رشته‌ی عددی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۵},\ldots$$

می‌بینید که عددها رفته‌رفته در حال کوچک‌تر شدن بوده و به صفر گرایش دارند. یعنی: فاصله‌ی این عددها تا ۰ در حال کمتر شدن است:



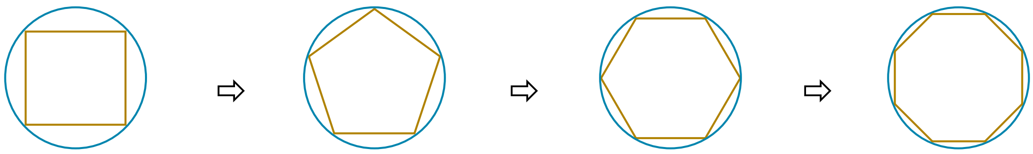
به همین دلیل گوئیم:

عددهای $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۴}$، $\frac{۱}{۵}$ و . . . . به عدد صفر میل می‌کنند.

ب) عددهای زیر نیز به عدد ۱ میل می‌کنند:

$$۱/۱,۱/۰۱,۱/۰۰۱,۱/۰۰۰۱,\ldots$$

مثال: هرگاه داخل یک دایره، چند ضلعی‌های منتظم را جا داده و در مراحل بعدی، تعداد اضلاع را زیاد کنیم:



می‌بینید که رفته‌رفته چند ضلعی به دایره شباهت بیشتری پیدا کرده و اختلاف محیط و مساحت آن با دایره کم می‌شود. اگر به زیاد کردن تعداد ضلع‌ها ادامه دهیم:

مقادیر محیط و مساحت چند ضلعی‌ها، به محیط و مساحت دایره میل می‌کنند.

بیان دقیق‌تر میل کردن به یک عدد در دو حالت:

میل کردن از سمت چپ:

ممکن است عددهای x با مقادیر کوچک‌تر به یک عدد نزدیک شوند. مانند:

$$۰/۵,۰/۹,۰/۹۹,۰/۹۹۹\longrightarrow ۱$$

گوئیم x از سمت چپ به ۱ میل می‌کند و می‌نویسیم: $x\to ۱^-$.

استاد قاسم پور

به صورت مشابه؛

میل از سمت راست:

ممکن است عددهای x با مقادیر بزرگ‌تر به عددی نزدیک شوند. مانند:

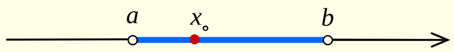
$$۲/۵\,,\,۲/۱\,,\,۲/۰۱\,,\,۲/۰۰۱ \longrightarrow ۲$$

گوئیم x از سمت راست به ۲ میل می‌کند و می‌نویسیم: $x \to ۲^+$.

مفهوم همسایگی، در میل کردن x و بررسی رفتار تابع نقش تعیین کننده دارد:

همسایگی نقاط:

بازه‌ی باز (a,b) را در نظر گرفته و نقطه‌ی $x_۰$ را در آن اختیار کنید؛ یعنی $a < x_۰ < b$:



می‌بینید که می‌توان با نقاط این بازه، از چپ و راست به عدد $x_۰$ نزدیک شد.

بازه‌ی فوق را یک همسایگی نقطه‌ی $x_۰$ گویند.

توجه کنید:

طبق تعریف، هر بازه‌ی باز همسایگی تمام نقاط خود محسوب می‌شود.

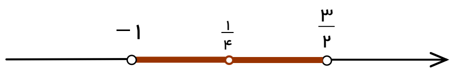
مثال: بازه‌ی $(-۱,\frac{۳}{۲})$ را در نظر بگیرید:

الف) این بازه همسایگی کدام یک از عددهای $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ است؟

ب) نقطه‌ی وسط این بازه را حساب کرده و آن را از بازه حذف کنید. مجموعه‌ی باقی مانده را بر حسب بازه‌ها بنویسید.

توجه کنید:

در مثال قبل؛ با حذف عدد $\frac{۱}{۴}$ از بازه، همچنان در مجموعه‌ی باقی مانده می‌توان از چپ و راست به عدد $\frac{۱}{۴}$ نزدیک شد:



نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

اگر بازه‌ی $(x-۱,۷)$ همسایگی عدد ۲ باشد، حدود x بازه‌ی .... است.

جواب:

همسایگی محذوف:

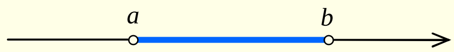
هرگاه مانند مثال قبل، یک نقطه را از همسایگی حذف کنیم، باز هم می‌توان از چپ و راست بـه آن نقطـه نزدیـک شـد. بـه ایـن مجموعه‌ی جدید، یک «**همسایگی محذوف**» برای آن نقطه گوئیم. نمونه‌ی دیگر:

مجموعه‌ی $(-۱,۲)-\{۱\}$ یک همسایگی محذوف نقطه‌ی $x_{۰}=۱$ است:

گاهی فقط همسایگی یک سمت نقطه مورد نظر است:

همسایگی یک‌طرفه:

به بازه‌ی (a,b) نگاه کنید:

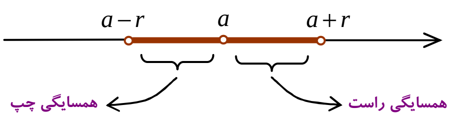


- **همسایگی راست:** در این بازه، فقط می‌توانیم با عددهای بیشتر از a به آن نزدیک شویم.
(این بازه یک همسایگی راست نقطه‌ی a محسوب می‌شود.)
- **همسایگی چپ:** در این بازه، فقط می‌توانیم با عددهای کمتر از b به آن نزدیک شویم.
(این بازه یک همسایگی چپ نقطه‌ی b محسوب می‌شود.)

توجه کنید:

اگر r عددی مثبت باشد، همسایگی‌های یک طرفه (به شعاع r) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

همسایگی چپ a: $(a-r,a)$ **همسایگی راست a:** $(a,a+r)$



مثال: مجموعه جواب نامعادله‌ی $\frac{۲}{|x-۱|}>۲$ را A گرفته و به موارد زیر پاسخ دهید:

الف) آیا A همسایگی راست نقطه‌ی ۲ است؟

ب) A همسایگی محذوف چه نقطه‌ای است؟

پ) A همسایگی راست نقطه‌ی . . . . . . است، ولی همسایگی این نقطه نیست.

در ادامه، رفتار مقادیر یک تابع، هنگامی که x به عددی میل می‌کند را بررسی می‌کنیم.

مثال: تغییرات مقادیر تابع $g(x)=\begin{cases} ۵-x & x\le ۲ \\ ۲x & x>۲ \end{cases}$ را وقتی مقادیر x به ۲ میل می‌کنند را در هر حالت زیر بررسی کنید:

الف) x با مقادیر کمتر از ۲ به آن میل کند.

ب) x با مقادیر بیشتر از ۲ به آن میل کند.

اکنون مفاهیم حدهای یک طرفه‌ی تابع را دقیقاً بیان می‌کنیم:

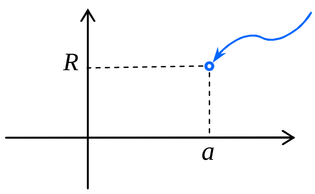
حد راست:

حد راست تابع f در نقطه‌ی a برابر عدد R است، هرگاه:

وقتی x را به اندازه کافی به a نزدیک کنیم، مقادیر $f(x)$ به اندازه دلخواه به R نزدیک شوند.

در این صورت می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=R$$

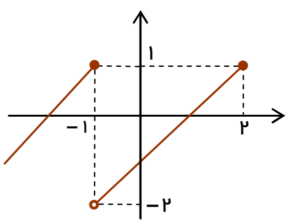


شرط ضروری:

برای بررسی و وجود حد راست، لازم است تابع در یک همسایگی راست نقطه a تعریف شده و دارای مقدار باشد.

مثال: نمودار تابع f در شکل مقابل داده شده است. مقادیر زیر را مشخص کنید:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -۱^+} f(x) \quad \text{و} \quad f(-۱)$$



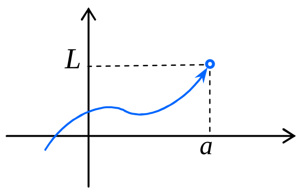
مفهوم حد از سمت چپ به صورت کاملاً مشابه بیان می‌شود:

حد چپ:

حد چپ تابع f در نقطه‌ی a برابر عدد L است، هرگاه:
وقتی x با مقادیر کمتر از a به آن میل کند، مقادیر $f(x)$ به اندازه‌ی دلخواه به L نزدیک شوند.

در این صورت می‌نویسیم:

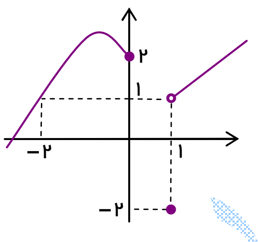
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$



مشابه حد راست:
برای امکان بررسی و وجود حد چپ، لازم است تابع در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده و دارای مقدار باشد.

مثال: با توجه به نمودار تابع f در شکل روبه‌رو، مقادیر زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x\to -۲^-} f(x)+\lim_{x\to ۱^+} f(x)-f(۱)$



ب) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)$

تذکر: (مهم)
چنان‌که در دو تعریف بالا آورده شده است:

- **در حد راست:**
  مقادیر x با عددهای کمی بیشتر از a به آن نزدیک می‌شوند.
- **در حد چپ:**
  مقادیر x با عددهای کمی کمتر از a به آن نزدیک می‌شوند.

برای نمونه؛
اگر $x\to (\frac{\pi}{۲})^+$ باید فهمید که x در ربع دوم دایره مثلثاتی بوده و در حالت $x\to (\frac{\pi}{۲})^-$، مقدار x در ربع اول قرار دارد.

حد تابـــع:

حد تابع f در یک نقطه‌ی a فقط وقتی برابر عددی چون b است که:

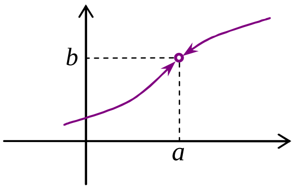
هر دوی حدهای چپ و راست در این نقطه موجود و برابر عدد b باشند.

استاد قاسم پور

یعنی:

وقتی x را به اندازه‌ی کافی از دو طرف به a نزدیک کنیم، مقادیر $f(x)$ به اندازه‌ی دلخواه به b نزدیک شوند.

در نمودار ببینید:



$$\lim_{x\to a} f(x)=b$$

توجه کنید:

برای امکان بررسی و وجود $\lim_{x\to a} f(x)$، لازم است تابع در یک همسایگی محذوف a (یعنی هم راست و هم چپ a) تعریف شده و دارای مقدار باشد.

مثال: نمودار تابع زیر را رسم کرده و توسط آن حد تابع را در نقاط الف) $x=-۱$ و ب) $x=۰$ بررسی کنید.

$$h(x)=\begin{cases} x+۲ & x\le -۱ \\ x^۲-۱ & x>-۱ \end{cases}$$

پاسخ

مثال: وجود حد تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ را توسط تعریف و رسم نمودار در نقطه‌ی $x=۱$ بررسی کنید.

پاسخ

مثال: تابع $g(x)=\sqrt{۲x-x^۲}$ را در نظر گرفته و دامنه‌ی آن را مشخص کنید. سپس تعیین کنید رفتار مقادیر این تابع در کدام سمت نقاط $a=۰$ و $a=۱$ و $a=۲$ قابل بررسی است؟

پاسخ

توجه کنید: (مهم)

طبق آن‌چه تا این‌جا گفته شده، دو مورد را تأکید می‌کنیم.

۱) وجود نداشتن حد تابع دو حالت دارد:

- هرگاه یکی از حدهای چپ و راست یا هر دو موجود نباشند. (مانند: تابع $y=\sqrt{x-1}$ در نقطه‌ی $x=1$)
- حدهای چپ و راست موجود بوده، ولی نابرابر باشند. (مانند چند مثال بعد)

۲) وقتی حد تابع در $x=a$ بررسی می‌شود، وجود داشتن یا نداشتن $f(a)$ تاثیری در وجود یا مقدار حد تابع ندارد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+1 & x>1\\ x^2-2 & x<1\end{cases}$ را رسم کرده و با استفاده از آن، حد تابع را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.

پاسخ

مثال: نمودار تابع $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را رسم کرده و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ را بررسی کنید.

پاسخ

مثال: نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در بازه‌ی $[-1,3)$ رسم کرده و $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را بررسی کنید.

پاسخ

در پایان این بخش، به یک حد ویژه و مهم توجه کرده و آن را به ذهن بسپارید.

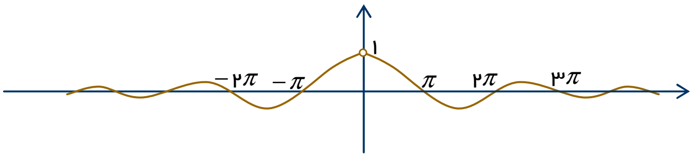
مثال: رفتار تابع $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ را هنگامی که $x\to 0$ بررسی می‌کنیم.

اولاً: تابع در $x=0$ تعریف نشده و نمودار ندارد.

استاد قاسم پور

0919 708 1058

ثانیاً: نمودار تقریبی تابع برای $x \neq 0$ با تشکیل جدول مقادیر (استفاده از ماشین حساب مهندسی) به صورت زیر خواهد بود:



در نمودار هم می‌بینید که $f(0)=\frac{0}{0}$ تعریف نشده است. ولی:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

---✧---

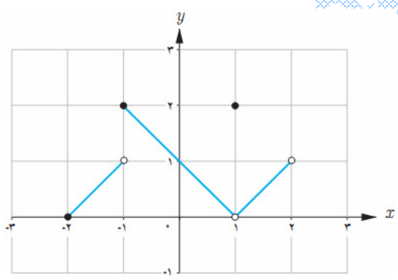
(کاربردهای گوناگون و مهم از مثال قبل را کمی پیش‌تر خواهیم دید.)

استاد قاسم‌پور

پاسخ دهید (۱)

۱- اگر بازه‌ی $(-1+2m,-\frac{m}{3})$ یک همسایگی نقطه‌ی -1 باشد، مجموعه مقادیر m را مشخص کنید.

۲- برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام مورد درست و کدام نادرست است؟



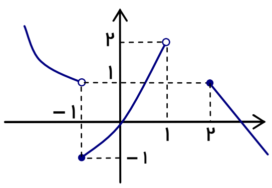
الف) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ ب) $f(1)=2$

پ) $f(2)=1$ ت) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=0$

ث) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=2$ ج) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

چ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ وجود ندارد. ح) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ وجود ندارد.

۳- نمودار تابع g به صورت روبه‌رو داده شده؛ حاصل $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ را بررسی کنید.



۴- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases}|x+3| & x\neq -2\\ -1 & x=-2\end{cases}$:

الف) مقدار $f(-2)$ چقدر است؟

ب) نمودار تابع را رسم کنید و توسط آن حاصل $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ را بیابید.

۵- در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{|1-x|}{x-1}$:

الف) تابع را به صورت دو ضابطه‌ای بنویسید.

ب) مقدار $f(1)$ چقدر است؟

0919 708 1058

پ) نمودار تابع را رسم کنید و توسط آن حاصل $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ را بررسی کنید.

۶- با توجه به دامنه‌ی تابع $g(x)=\sqrt{1-x}$، در مورد $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ چه می‌توان گفت؟

منتخب کتاب:

۱- تابع g با ضابطه‌ی $g(x)=\begin{cases}-1 & x\in Z\\ 2 & x\notin Z\end{cases}$ را در نظر بگیرید: (Z اعداد صحیح)

الف) نمودار تابع g را در فاصله‌ی $[-4,2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار، حدهای زیر را به‌دست آورید:

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} g(x)$

استاد قاسم پور

۲- تابع g با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را در نظر بگیرید:

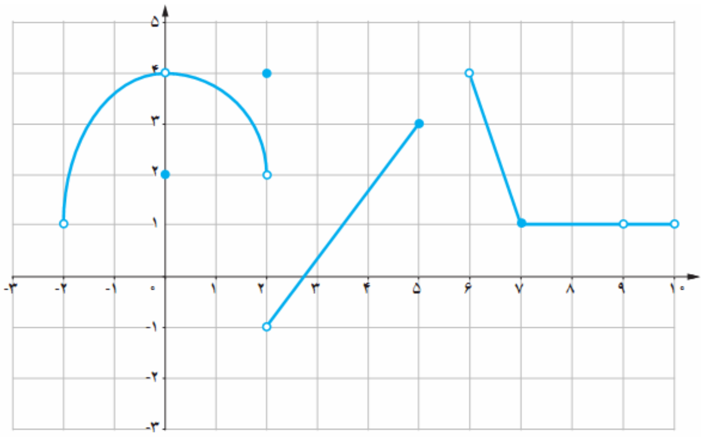
الف) دامنه‌ی این تابع را به‌دست آورید.

ب) دامنه‌ی تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی $0/9$ تعریف شده است؟

ت) آیا تابع در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست این نقطه چطور؟

۳- نمودار تابع f به صورت زیر است. حدها را در صورت وجود حساب کنید:



الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

۴- با توجه به دامنه‌ی تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-2}$ در نقطه‌ی $x=2$ چه می‌توان گفت؟

۲ محاسبه حد

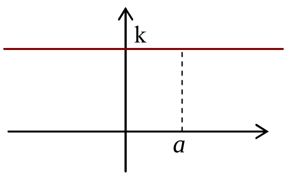
در این بخش، روش‌های (قضایای) محاسبه‌ی حد توابع فقط با استفاده از ضابطه‌ی آن‌ها - یعنی بدون جدول مقادیر یا نمودار - بیان و بررسی می‌شوند. این روش‌ها برای حدهای یک طرفه نیز صحیح هستند.

تذکر مهم:

هنگام بررسی رفتار تابع و تعیین حد آن در $x=a$، فقط نقاط و مقادیر تابع در یک همسایگی هر چند کوچک در دو طرف a مهم بوده و مبنای محاسبه هستند. (نقاط دور از a و همچنین خودِ $x=a$ را در نظر نمی‌گیریم!)

❖ **تابع ثابت:**

اگر $f(x)=k$ تابع ثابت (عدد k) باشد، آنگاه در هر نقطه‌ی a داریم:



$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} k=k$$

اصطلاحاً گوئیم: حد عدد در هر نقطه‌ای همان عدد است.

برای نمونه؛

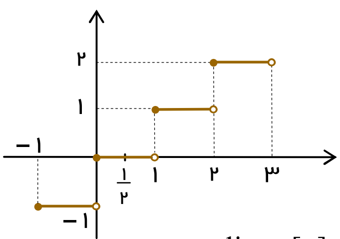
$$\lim_{x\to\sqrt{۲}} ۳=۳ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to -۲} -۱=-۱$$

مثال: (از کتاب) تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را در نظر بگیرید. آیا این تابع در نقطه‌ی صفر حد دارد؟ چرا؟

پاسخ

کاربرد ویژه:

حد تابع جزء صحیح $f(x)=[x]$ در نقطه a:



حالت ۱: (a عدد غیرصحیح)

برای نمونه، در محاسبه حد $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} [x]$، در نقاط نزدیک و چپ و راست $x=\frac{۱}{۲}$، مقدار $[x]$ ثابت صفر است و بنابراین: $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} [x]=۰$. همچنین: $\lim_{x\to ۰/۹۹} [x]=۰$. (چرا؟!)

حالت ۲: (a عدد صحیح)

برای نمونه، در محاسبه حد $\lim_{x\to ۲} [x]$، در نقاط (نزدیک) سمت راست $x=۲$، مقدار ثابت $[x]=۲$ و در سمت چپ $x=۲$، مقدار ثابت $[x]=۱$ را داریم. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲^+} [x]=۲ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۲^-} [x]=۱$$

استاد قاسم پور

بویژه این‌که $\lim\limits_{x\to ۲}[x]$ وجود ندارد.

بیان کلی:

آن‌چه در نقاط $x=\frac{۱}{۲}$ و $x=۲$ برای تابع $f(x)=[x]$ دیدیم، به صورت مشابه در کل برقرار است:

- در هر نقطه‌ی غیر صحیح:

$$a\notin \mathbb{Z} \quad \to \quad \lim_{x\to a}[x]=[a]$$

- در هر نقطه‌ی صحیح:

$$a\in \mathbb{Z} \quad \to \quad \lim_{x\to a^+}[x]=a\ ,\quad \lim_{x\to a^-}[x]=a-۱$$

نتیجه: تابع $y=[x]$:

در هر نقطه‌ی غیر صحیح حد دارد، ولی در نقاط صحیح فقط حد چپ و راست داشته، اما حد ندارد.

نمونه‌های دیگر:

$$\lim_{x\to\sqrt{۲}}[x]=[\sqrt{۲}]=۱ \quad و \quad \lim_{x\to -\frac{۳}{۲}}[x]=[-\frac{۳}{۲}]=-۲$$

$$(\lim_{x\to -۲^-}[x]=-۳ \quad و \quad \lim_{x\to -۲^+}[x]=-۲) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to -۲}[x] \text{ وجود ندارد.}$$

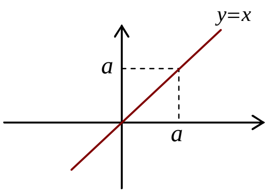
مثال: (از کتاب) مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ را در نقطه‌ی صفر به‌دست آورید.

پاسخ

تابع همانی:

در هر نقطه‌ی a داریم: $\lim\limits_{x\to a}x=a$. برای نمونه؛

$$\lim_{x\to ۴}x=۴ \quad و \quad \lim_{x\to -۱}x=-۱$$



حد جبر توابع:

فرض کنید: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=M$. آنگاه:

الف) $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\pm g(x)\right)=L\pm M$.

ب) $\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=LM$.

پ) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$؛ البته به شرط آن‌که حد مخرج صفر نباشد. $(M\neq ۰)$

مثال بعد توضیحات و نتایج مفیدی از احکام فوق در خود دارد.

مثال: (از کتاب) فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از موارد قبل توضیح دهید چرا تساوی‌های زیر درست هستند:

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=cL$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^{۲}(x)=L^{۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to a} -f(x)=-L$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=\frac{۱}{L}$ با شرط $L\neq ۰$.

بویژه:

ث) داریم: $\lim\limits_{x\to a} f^{n}(x)=L^{n}$ و در حالت خاص: $\lim\limits_{x\to a} x^{n}=a^{n}$.

استاد قاسم پور

توجه کنید:

با توجه به مثال قبل؛

اگر بخواهیم حدی مانند $\lim\limits_{x\to -۲} ۳x$ را حساب کنیم، چون $\lim\limits_{x\to -۲} x=-۲$ است، مقدار حد مورد نظر $۳(-۲)=-۶$ است.

همچنین مقدار حد $\lim\limits_{x\to -۲} x^{۳}$ برابر $(-۲)^{۳}=-۸$ خواهد شد.

مثال: مقادیر $\lim\limits_{x\to ۲\sqrt{۲}} \sqrt{۲}x-۳$ و $\lim\limits_{x\to -۳} -۲x^{۳}$ را حساب کنید.

پاسخ

با توجه به چند نمونه‌ی قبل، در کل داریم:

❖ **تابع چند جمله‌ای:**

حد این توابع در هر نقطه‌ای وجود دارد و با جایگذاری نقطه به جای x به‌دست می‌آید:

$$\boxed{\lim_{x\to x_۰}(ax^{n}+bx^{n-۱}+\cdots+kx+l)=ax_۰^{n}+bx_۰^{n-۱}+\cdots+kx_۰+l}$$

برای نمونه؛

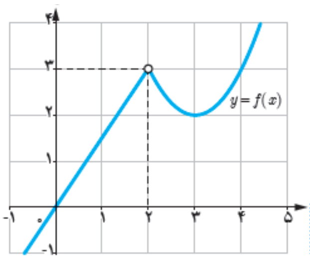
$$\lim_{x\to\sqrt{۲}} ۳-۲x^۲ = ۳-۲(\sqrt{۲})^۲ = ۳-۴ = -۱$$

مثال: حاصل $\lim_{x\to -۲} \frac{۳x-x^۲}{x^۳+۳}$ را حساب کنید.

پاسخ

مثال: (از کتاب) الف) حاصل $\lim_{x\to \frac{۱}{۲}} \frac{x-[x]}{۱-x}$ را حساب کنید.

ب) شکل روبه‌رو نمودار تابع f است. مقدار $\lim_{x\to ۲} xf(x)$ را بیابید.



استاد قاسم پور

مثال: در تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+ax-۵ & x<-۱ \\ ax-۱ & x>-۱ \end{cases}$، مقدار a را طوری تعیین کنید که $\lim_{x\to -۱} f(x)$ موجود باشد.

پاسخ

❖ **حد تابع رادیکالی:**

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ باشد، وقتی تابع زیر رادیکال قرار گیرد، با توجه به فرجه، حد محاسبه می‌شود:

- اگر n فرد باشد، حد L هم زیر رادیکال می‌رود: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

برای نمونه؛

$$\lim_{x\to ۹} \sqrt[۳]{۱-x} = \sqrt[۳]{-۸} = -۲$$

- اگر n زوج باشد و عدد L مثبت باشد: $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$

برای نمونه؛

$$\lim_{x\to -۵} \sqrt{۱-۳x} = \sqrt{۱+۱۵} = ۴$$

ولی $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{۱-x}$ وجود ندارد، چون در نزدیک $x=۲$ زیر رادیکال منفی است.

حالت خاص: (مهم)

اگر در حالت فرجه‌ی زوج، حد زیر رادیکال صفر شود، باید مقادیر زیر رادیکال منفی نباشند تا حد موجود باشد.

نمونه‌ها:

- $\lim\limits_{x\to ۲^-}\sqrt{۲-x}$ را ببینید:

وقتی $x\to ۲^-$، مقدار x کمی از ۲ کوچک‌تر بوده و در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۲^-} ۲-x=۰^+$. پس:

$$\lim_{x\to ۲^-}\sqrt{۲-x}=\sqrt{۰^+}=۰$$

- $\lim\limits_{x\to ۲^+}\sqrt{۲-x}$ را ببینید:

وقتی $x\to ۲^+$، مقدار x کمی از ۲ بزرگ‌تر بوده و در نتیجه $\lim\limits_{x\to ۲^+} ۲-x=۰^-$. پس $\sqrt{۲-x}$ تعریف نشده است و

$\lim\limits_{x\to ۲^+}\sqrt{۲-x}=\sqrt{۰^-}$ وجود ندارد.

مثال: (از کتاب) مقدار $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{\sqrt{x-۲}}{[x]+۲}$ را بیابید.

پاسخ

مثال: حاصل $\lim\limits_{x\to -۳}\sqrt{۱+۲\sqrt{۱-۵x}}$ را حساب کنید.

پاسخ

❖ **حد تابع قدرمطلق:**

طبق نمودار $y=|x|$، به آسانی دیده می‌شود که همواره $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$ است. در کل:

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$، آنگاه همواره $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$. برای نمونه؛

$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}}|۴x-۴|=|۴(\frac{۱}{۲})-۴|=|۲-۴|=|-۲|=۲$$

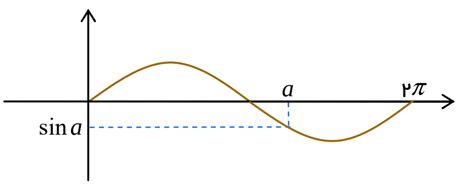
مثال: مقدار b را طوری بیابید که تابع زیر در $x=-۱$ دارای حد باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}+[x]}{|x|} & x<-۱\\ ۳x+b & x>-۱\end{cases}$$

پاسخ

❖ **حد توابع مثلثاتی:**

با توجه به نمودار تابع $y=\sin x$، در هر نقطه‌ی دلخواه a، حد با جایگذاری به‌دست می‌آید:



$$\boxed{\lim_{x\to a}\sin x=\sin a}$$

به صورت کاملاً مشابه، در هر نقطه‌ی a داریم:

$$\boxed{\lim_{x\to a}\cos x=\cos a}$$

برای نمونه؛

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}}(x-\frac{\pi}{۳})\sin x=(\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۳})\sin\frac{\pi}{۶}=-\frac{\pi}{۶}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{\pi}{۱۲}$$

مثال: حاصل حد $\lim_{x\to\frac{۴\pi}{۳}}\dfrac{۱-\cos x}{\sin x}$ را حساب کنید.

پاسخ

مثال: حاصل حد تابع $y=\sqrt{\sin x-\cos x}$ هنگامی که $x\to\frac{\pi}{۴}^{-}$ را بیابید.

پاسخ

استاد قاسم پور